بردارها:

- انواع کمیت های اسکالر و کمیت های برداری:

کمیت های اسکالر:

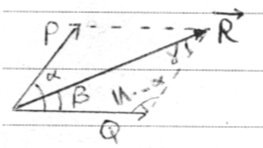
کمیت هایی هستند که تنها دارای اندازه هستند مانند: جرم، مسافت طی شده و زمان

کمیت های برداری:

کمیت هایی هستند که علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز می باشند مانند: نیرو، شتاب، گشتاور و سرعت

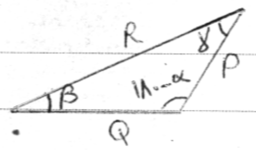
روش های جمع برداری:

۱) روش متوازی الاضلاع



$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$|R|^2 = |P|^2 + |Q|^2 + 2|P||Q|\cos\alpha$$



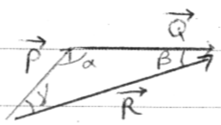
$$\frac{|R|}{\sin(180-\alpha)} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

$$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \_\_ \\ \gamma = \_\_ \end{cases}$$

با محاسبه یکی از دو زاویه β یا γ می توان زاویه بردار نتیجه با یکی از دو راستای اصلی افقی یا عمودی را بدست آورد

۲) روش مثلث



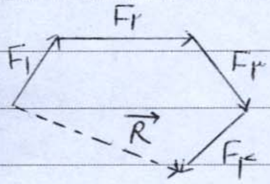
$$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$|R|^2 = |P|^2 + |Q|^2 - 2|P||Q|\cos\alpha$$

$$\frac{|R|}{\sin\beta} = \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

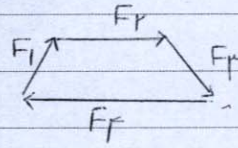
۳) روش ترسیمی

در این روش بردارها بطور متوالی ترسیم می شوند بگونه ای که ابتدای هر بردار بر انتهای بردار قبلی منطبق گردد بردار که ابتدای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل می کند بردار برآیند می باشد. در این رسم لازم است که ترسیم بردارها به صورت دقیق و با مقیاس مناسب انجام گیرد



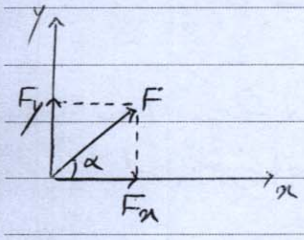
$$\vec{R} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

نکته: اگر پس از ترسیم ابتدای اولین بردار و انتهای آخرین بردار بر هم منطبق شوند برآیند بردارها صفر می باشد



۴) روش جمع مؤلفه های برداری:

در این روش هر بردار را به مؤلفه های اصلی خود در راستای محورهای اصلی تجزیه می کنیم و سپس این مؤلفه ها را در راستای هر یک از جهات اصلی با هم جمع جبری می کنیم. مقادیری که بدست می آید مؤلفه های برداری، بردار برآیند در هر یک از راستاهای اصلی خواهد بود



$$\Rightarrow F_x = |F|\cos\alpha$$
$$F_y = |F|\sin\alpha$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

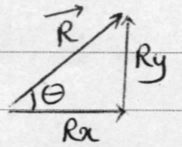
i و j بردارهای یکه در راستای هر یک از دو محور اصلی x و y هستند

بردار یکه: برداری است به بزرگی واحد و هم راستا و هم جهت با بردار اصلی

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_n}$$

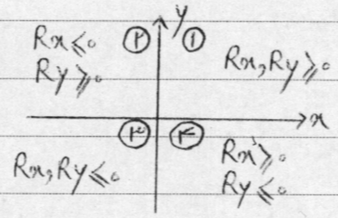
$$\left.\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{R_x i} + \vec{R_y j} \\ F_1 &= F_{1x} i + F_{1y} j \\ F_2 &= F_{2x} i + F_{2y} j \\ F_n &= F_{nx} i + F_{ny} j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum F_{iy} = F_{1y} + \dots + F_{ny} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$



$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

برحسب آنکه مقادیر R_x و R_y دارای چه علامتی باشند بردار نتیجه در یکی از چهار ناحیه دستگاه مختصات قرار می‌گیرد



بردارها در فضا:

در حالت سه بعدی بردارها علاوه بر دو بعد x و y دارای یک مؤلفه در راستای محور z نیز می‌باشند بردار یکه در راستای محور z با K نمایش داده می‌شود

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\vec{F} = |F| . \vec{\lambda}$$

$\vec{\lambda}$: بردار یکه بردار F است که دارای بزرگی (۱) و هم‌راستای بردار F می‌باشد

$$\lambda = \frac{\vec{F}}{|F|} = \frac{F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \qquad \vec{\lambda} = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k$$

$$\lambda_x = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \dots$$

$\lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 = 1$

α : زاویه بردار F با محور x
β : " " " y
γ : " " " z

$$\vec{\lambda} = \underbrace{\cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k}_{\text{کسینوس‌های هادی بردار F}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\begin{cases} F_x = |F| . \cos\alpha \\ F_y = |F| . \cos\beta \\ F_z = |F| . \cos\gamma \end{cases}$$

نیرویی که اندازه و دو نقطه از خط اثر آن معلوم است :

فرض کنید که بردار $\vec{F}$ با $|F|$ موجود است. این بردار از نقطه M به سمت نقطه N می‌باشد، مؤلفه‌های برداری این بردار به شکل زیر محاسبه می‌شود

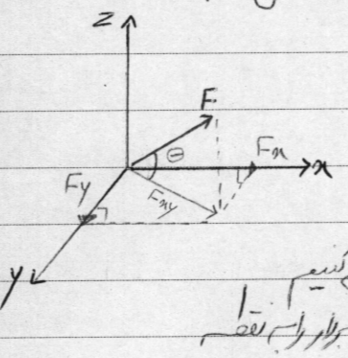
$M(x_1, y_1, z_1)$

$N(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{MN} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{F} = |F| . \vec{\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{\vec{MN}}{|MN|}$$

مؤلفه‌های یک بردار فضایی بر روی یکی از صفحات اصلی :



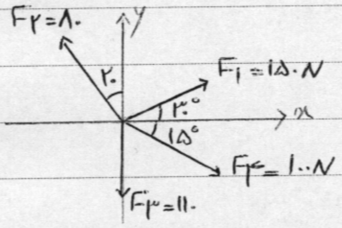
$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

فرض کنیم می‌خواهیم تصویر یا مؤلفه این بردار را در صفحه xy بدست آوریم از انتهای بردار F به موازات محور z یک عمود بر صفحه xy ترسیم می‌کنیم تا این صفحه را در یک نقطه قطع کند برداری که ابتدای بردار را به نقطه بدست آمده وصل می‌کند تصویر بردار خواهد بود

$|F_{xy}| = |F| \cdot \cos\theta$

$|F_{xy}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow \vec{F_{xy}} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$

مثال: مطلوبست محاسبه برآیند چهار نیروی نشان داده شده در شکل زیر با استفاده از روش جمع مؤلفه های برداری؟



$F_{1x} = 150 \cdot \cos 30 = 129.9$

$F_{1y} = 150 \cdot \sin 30 = 75$

$F_{2x} = -80 \cdot \sin 20 = -27.4$

$F_{2y} = 80 \cdot \cos 20 = 75.2$

$F_{3x} = 0 \quad , \quad F_{3y} = -110$

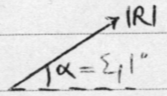
$F_{4x} = 100 \cdot \cos 15 = 96.6$

$F_{4y} = -100 \cdot \sin 15 = -25.9$

$R_x = \Sigma F_x = 129.9 - 27.4 + 0 + 96.6 = 199.1$

$R_y = \Sigma F_y = 75 + 75.2 - 110 - 25.9 = 14.3$

$R = 199.1\vec{i} + 14.3\vec{j} \Rightarrow |R| = \sqrt{14.3^2 + 199.1^2} = 199.6$



$\Rightarrow \alpha = \mathrm{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{14.3}{199.1}\right) = 4.1°$

مثال: نیرویی به اندازه $500\,N$ با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای 60 و 45 و $120°$ تشکیل می دهد مولفه های F_x ، F_y ، F_z این نیرو را تعیین کنید؟

$|F| = 500$

$F = F_x i + F_y j + F_z k \Rightarrow \vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$

$\alpha = 60 \quad \beta = 45 \quad \gamma = 120$

$\vec{\lambda} = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k$

$= \cos 60\, i + \cos 45\, j + \cos 120\, k$

$= 0.5 i + 0.707 j - 0.5 k$

$$\vec{F} = ۵۰۰\,(۰.۵۰ i + ۰.۷۰۷ j - ۰.۵۰ K) = \underbrace{۲۵۰ i}_{F_x} + \underbrace{۳۵٤ j}_{F_y} - \underbrace{۲۵۰ K}_{F_z}$$

مثال: اگر مؤلفه های بردار F به شرح زیر معلوم باشد مطلوبست محاسبه زوایای هادی؟

$$\vec{F} = ۲۰ i - ۳۰ j + ۶۰ K$$

$$|F| = \sqrt{۲۰^۲ + (-۳۰)^۲ + ۶۰^۲} = ۷۰$$

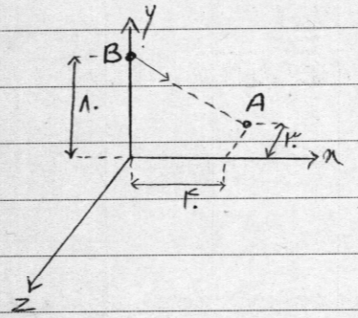
$$F_x = |F| \cdot \cos\alpha \Rightarrow ۲۰ = ۷۰ \cdot \cos\alpha \quad \cos\alpha = ۲/۷ \quad \alpha = Arccos(۲/۷) = ۷۳٫٤$$

$$F_y = |F| \cdot \cos\beta \Rightarrow -۳۰ = ۷۰ \cdot \cos\beta \Rightarrow \beta = Arccos(-۳/۷) = ۱۱۵٫٤ = -۶٤٫۶$$

$$F_z = |F| \cdot \cos\gamma \Rightarrow ۶۰ = ۷۰ \cdot \cos\gamma \Rightarrow \gamma = Arccos(۶/۷) = ۳۱^\circ$$

مثال: در شکل زیر مقدار نیرو ۲۵۰۰ N می باشد بردار نیرو از نقطه B به سمت نقطه A می باشد مطلوبست محاسبه مؤلفه های برداری و زوایای هادی؟ (۲.۷ ص ۳۰)

A در صفحه zx و B بر روی محور y



$$|F| = ۲۵۰۰ N$$

$$A(٤۰, ۰, -۳۰) \;,\; B(۰, ۸۰, ۰)$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{BA}}{|BA|} = \frac{٤۰ i - ۸۰ j - ۳۰ K}{\sqrt{٤۰^۲ + ۸۰^۲ + ۳۰^۲}}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{٤۰ i - ۸۰ j - ۳۰ K}{۹٤٫۳}$$

$$\vec{F} = \frac{۲۵۰۰}{۹٤٫۳} \times (٤۰ i - ۸۰ j - ۳۰ K) = ۱۰۶۰ i - ۲۱۲۰ j - ۷۹۵ K$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|F|} = \frac{۱۰۶۰}{۲۵۰۰} \Rightarrow \alpha = Arccos\left(\frac{۱۰۶۰}{۲۵۰۰}\right) = ۶٤٫۹$$

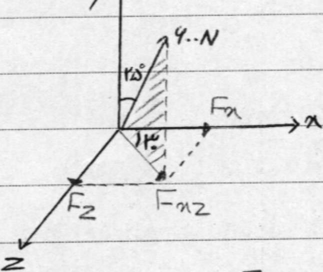
$$\cos\beta = \frac{F_y}{|F|} = \frac{-۲۱۲۰}{۲۵۰۰} \Rightarrow \alpha = Arccos\left(\frac{-۲۱۲۰}{۲۵۰۰}\right) = ۱٤۸^\circ$$

Date : / /

$\cos\gamma = \frac{F_z}{|F|} = \frac{-۷۹۵}{۲۵۰۰} \Rightarrow \alpha = ۱۰۸٫۵°$

تمرین : در مثال قبل مطلوبست محاسبه مؤلفه های بردار و زوایای بردار بر روی سه صفحه xy و xz و yz ؟

مثال : برای نیروی ۶۰۰ نیوتنی نشان داده شده در شکل مطلوبست محاسبه مؤلفه ها در راستای سه محور اصلی و زوایای هادی ؟ (۲_۷۱ ص ۳۲)



$F_y = ۶۰۰ \cos ۲۵° = ۵۴۳٫۸\ N$

F_y : تصویر $۶۰۰N$ روی محور y

$۹۰ - ۲۵ = ۶۵°$ ← زاویه نیرو با صفحه xz

$F_{xz} = ۶۰۰ \cos ۶۵ = ۲۵۳٫۶$ یا $(F \sin ۲۵°)$

$F_x = F_{xz} \cos ۳۰ = ۲۵۳٫۶ \cos ۳۰ = ۲۱۹٫۶$

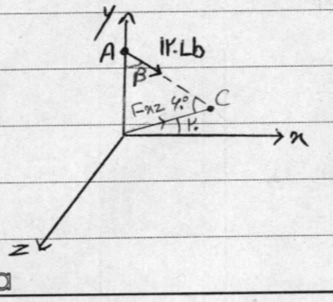
$F_z = F_{xz} \sin ۳۰ = ۲۵۳٫۶ \sin ۳۰ = ۱۲۶٫۸$

$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{۲۱۹٫۶}{۶۰۰} = ۰٫۳۶۶ \Rightarrow \alpha = \operatorname{Arccos}(۰٫۳۶۶) = ۶۸٫۵۳$

$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{۱۲۶٫۸}{۶۰۰} = ۰٫۲۱ \Rightarrow \gamma = ۷۷٫۸۷°$

$\beta = ۲۵°$

مثال : راستای نیروی نشان داده شده در شکل زیر از نقطه C در صفحه xz عبور می کند مطلوبست محاسبه مؤلفه های این نیرو و زوایای هادی ؟ (۲_۷۳ ص ۳۲)



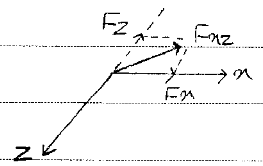
$\beta = ۹۰ - ۶۰ = ۳۰$

$F_y = -۱۲۰ \cos ۳۰ = -۱۰۳٫۹$

$F_{xz} = ۱۲۰ \sin ۳۰ = ۶۰\ Lb$

$F_x = ۶۰ \cos ۲۰ = ۵۶٫۴$

$F_z = -۶۰ \sin ۲۰ = -۲۰٫۵$



$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{56.4}{120} = 0.47$$

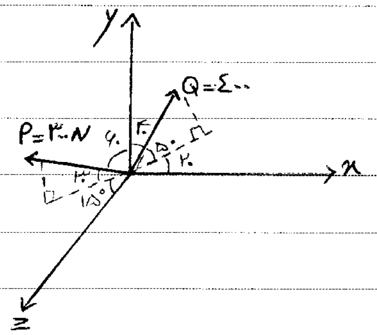
$$\alpha = \operatorname{Arccos}(0.47) = 61.96$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{-20.5}{120} = -0.117 \Rightarrow \gamma = 99.8$$

مثال: اندازه و جهت برآیند دو نیروی نشان داده شده در شکل را تعیین کنید. (۲-۹۲)

بردار 400N با صفحه xz زاویه ۵۰ درجه می‌سازد

بردار 300N با صفحه xz زاویه ۳۰ درجه می‌سازد



$$P = P_x i + P_y j + P_z K$$

$$P_y = 300 \cos 60 = 150$$

$$P_{xz} = 300 \cos 30 = 259.8$$

$$P_x = -259.8 \sin 15 = -67.24$$

$$P_z = 259.8 \cos 15 = 250.95\,N$$

$$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z K$$

$$Q_y = 400 \cos 40 = 306.4 \qquad Q_{xz} = 400 \cos 50 = 257.1$$

$$Q_x = 257.1 \cos 20 = 241.6 \qquad Q_z = -257.1 \sin 20 = -87.93$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (-67.24 + 241.6)\vec{i} + (150 + 306.4)\vec{j} + (250.95 - 87.93)\vec{K}$$

$$\vec{R} = 174.36\vec{i} + 456.4\vec{j} + 163.02\vec{K}$$

$$|R| = \sqrt{(174.36)^2 + (456.4)^2 + (163.02)^2} = 515\,N$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R_x}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{174.36}{515}\right) = 70.21$$

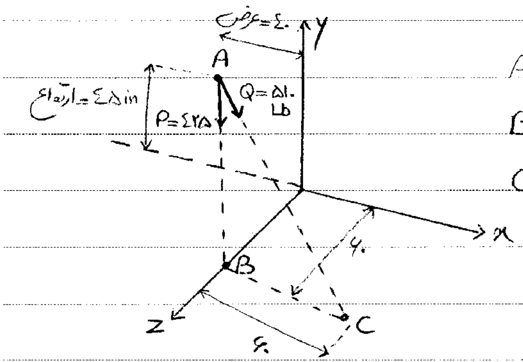
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{R_y}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{456.4}{515}\right) = 27.6$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{R_z}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{163.02}{515}\right) = 71.54^\circ$$

مثال: در شکل زیر مطلوبست محاسبه برآیند دو بردار نیروی اعمال شده به نقطه A ؟ (۲-۹٤)

A در صفحه xy

B,C در صفحه xz



$A(-40, 45, 0)$

$B(0, 0, 60)$

$C(60, 0, 60)$

$$\vec{P} = |P|.\lambda_P = |P|.\frac{\vec{AB}}{|AB|}$$

$$= 425 \times \frac{40i - 45j + 60k}{\sqrt{40^2 + 45^2 + 60^2}}$$

$$= 425/85 \times (40i - 45j + 60k)$$

$$= 200i - 225j + 300k$$

$$\vec{Q} = |Q|.\lambda_Q = |Q|.\frac{\vec{AC}}{|AC|} = 510 \times \frac{100i - 45j + 60k}{\sqrt{100^2 + (45)^2 + 60^2}}$$

$$= \frac{510}{125} \times (100i - 45j + 60k) = 408i - 183.6j - 244.8k$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (200 + 408)i + (-225 - 183.6)j + (300 + 244.8)k$$

$$= 608i - 408.6j + 544.8k$$

تعادل ذره:

برای آنکه یک ذره دارای تعادل باشد باید برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد در مسائل تعادل ذره ابتدا دیاگرام آزاد ذره را رسم می کنیم، دیاگرام آزاد ذره شامل تمامی نیروهای معلوم و مجهول وارد بر ذره است سپس برآیند بردارهای نیروی وارده بر ذره را به گونه ای محاسبه می کنیم که برابر صفر شود برای این منظور می توان از روش های مختلف جمع برداری کمک گرفت به طور مثال اگر از روش ترسیمی استفاده می کنیم بردارها را باید به صورت پیاپی به گونه ای رسم کنیم که انتهای آخرین بردار بر ابتدای اولین بردار منطبق شود. اگر