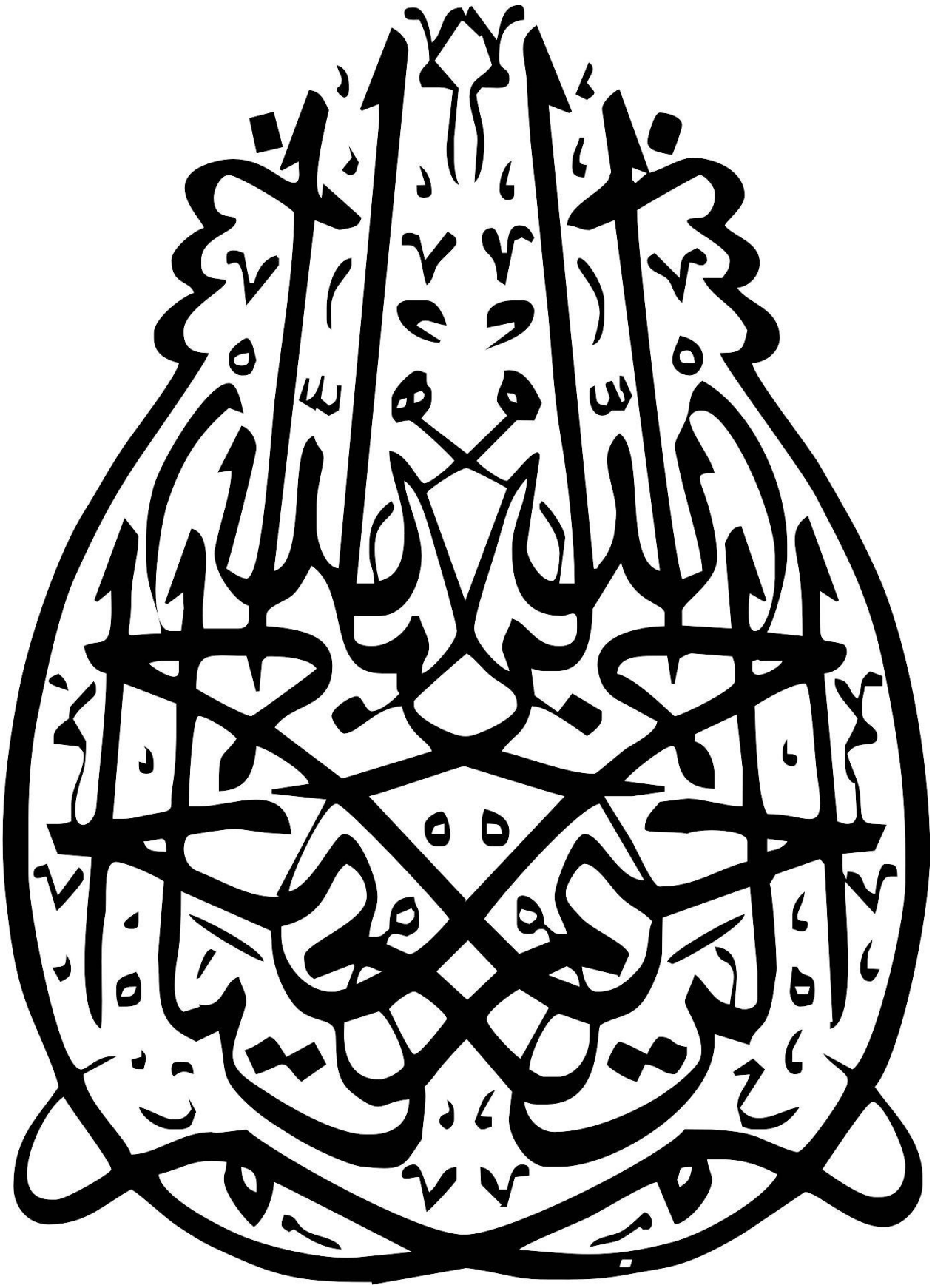


استاتیک

مهدی بنائی

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

فهرست :

1 مفاهیم پایه
2 استاتیك ذره ها
3 اجسام صلب؛ سیستم نیروهاي معادل
4 تعادل اجسام صلب
5 نیروهاي گسترده؛ مراکزهندسي ومراکز گراني
6 تحلیل سازه ها
7 نیروها درتیرها وکابلها
8 نیروهاي گسترده؛ گشتاورهاي لختي

فصل اول

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

استاتیک یا ایستایی شاخه‌ای از مکانیک و علوم مهندسی است که به بحث و مطالعه دربارهٔ سامانه‌های فیزیکی در حال تعادل ایستا (یا تعادل استاتیکی) می‌پردازد. تعادل ایستا حالتی است که در آن، مکان نسبی زیرسامانه‌ها نسبت به یکدیگر تغییر نکند یا آن‌که اجزا و سازه‌ها در اثر اعمال نیروهای خارجی، در حال ایستا و سکون باقی بمانند. در حالت تعادل ایستا، سامانهٔ مورد نظر یا در حال سکون است یا مرکز جرم (گرانیگاه) آن با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

با استفاده از قانون دوم نیوتون به این نتیجه می‌رسیم که در یک سامانهٔ در حال تعادل ایستا، نیروی خالص و نیز گشتاور خالص وارد بر هر یک از جرم‌های درون سامانه برابر با صفر است، و این بدان معناست که در ازای هر نیرویی که بر یک جزء یا مؤلفه از سامانه وارد می‌شود، نیرویی به همان اندازه ولی در جهت مخالف به آن جزء اعمال می‌گردد. این‌که نیروی خالص وارد بر سامانه برابر با صفر باشد، به عنوان شرط اول تعادل شناخته می‌شود. این شرط که گشتاور خالص وارد بر سامانه برابر با صفر باشد، به شرط دوم تعادل موسوم است.

ایستایی‌شناسی از جمله مباحثی است که در تجزیه و تحلیل سازه‌ها، مثلاً در مهندسی سازه یا معماری، و نیز به هنگام مطالعات سیالات در حالت سکون مثل پایدای سدها تحت فشارهای عظیم هیدرو استاتیکی آب کاربرد بسیار دارد. مقاومت مصالح (مکانیک ماده‌ها) شاخه‌ای مرتبط از علم مکانیک است که مبحث تعادل ایستا در آن بسیار به کار می‌رود. استاتیک پایه ای‌ترین و اصلی‌ترین درس در رشته مهندسی مکانیک و عمران محسوب میشود.

به عنوان یک تعریف کلی استاتیک شاخه‌ای از علم مکانیک است که به مطالعه نیروهای وارد شده بر اجسام صلب در حال سکون می‌پردازد.

علم مکانیک چیست؟

- شاخه ای از علم فیزیک که شرایط اجسام ساکن یا درحال حرکت را تحت اثر نیروها بررسی و پیش بینی می کند.

- طبقه بندی علم مکانیک :
  ۱) اجسام صلب
     I. استاتیک
     II. دینامیک
  ۲) اجسام تغییر شکل پذیر
  ۳) سیالات
- مکانیک یک علم کاربردی است و درهسته مرکزی بیشتر تحلیل های مهندسی جای دارد.
- مکانیک پایه ی بسیاری از علوم مهندسی است ودرحقیقت هیچ علمی درمهندسی مهمتر از مکانیک نیست.

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

مفاهیم اساسی

- *"Space"* فضا مکان هندسی نقاطی است که در آن میدانی سه بعدی برای نقاط بکاربرده می شود.
- *"Time"* زمان مشخصه ای که وقوع جسم را اطلاع میدهد.(شاخص توالی رویدادها)
- *"Mass"* جرم خاصیتی از هر جسم است که بصورت مقدار جاذبه گرانشی ظاهر می شود.
- *"Force"* عمل یک جسم روی جسم دیگر را نشان می دهد.یک نیرومشخصه ایست که با نقطه اثر، بزرگی و جهت تعیین می شود.(کمیت برداری)

درمکانیک نیوتنی مفاهیم زمان- جرم - فضا مطلق و مستقل از هم می باشند.اما نیرو مستقل نبوده وبه جرم وآهنگ تغییر سرعت در زمان (شتاب) وابسته است.

اصول بنیادی

- قانون اول نیوتن :وقتی برایند نیروها روی یک ذره صفر است جسم درحالت سکون یا حرکت ثابت خود خواهد ماند.

(Newton's First Law)

- قانون دوم نیوتن : نیرو متناسب است با جرم و شتاب جسم.

$$F = ma$$

(Newton's Second Law)

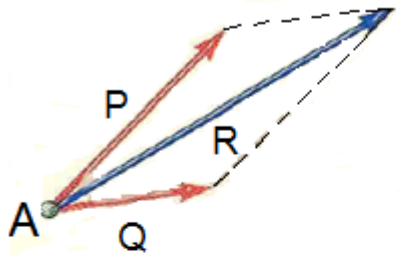
- قانون سوم نیوتن :برای هر عملی عکس العملی وجود دارد برابر ولی با جهت مخالف.

(Newton's Third Law)

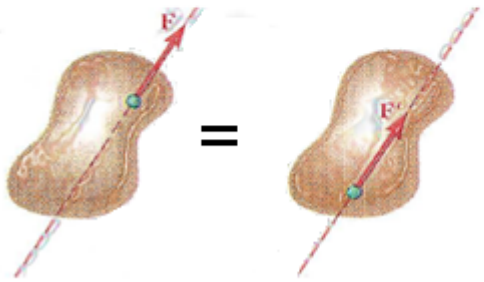
- قانون گرانش نیوتن: دو ذره در راستای خط واصل خود با نیرویی به سمت یکدیگر جذب می شوند که با حاصلضرب جرمشان نسبت مستقیم و با فاصله شان نسبت عکس دارد.

(Newton's Law of Gravitation)

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad W = mg, \quad g = \frac{GM}{R^2}$$



- قانون متوازی الاضلاع



•اصل قابلیت انتقال

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

سیستم های اندازه گیری

- International System of Units (SI):
سیستم بین المللی واحدها

واحدهای اصلی،طول – زمان – جرم هستند برای سنجش این خاصیتها ازلحاظ کمی: متر(m) ثانیه (s) و کیلوگرم (kg) رابکار می بریم.

	جرم	طول	زمان
نماد	m	L	t
واحد	kg	m	s

$$F = ma$$

$$1\text{N} = (1kg)\left(1\frac{m}{s^2}\right)$$

- U.S. Customary Units
واحدهای مرسوم آمریکایی

واحدهای اصلی،طول – زمان –نیرو هستند برای سنجش این خاصیتها ازلحاظ کمی: فوت(ft) ثانیه (s) و پوند (lb) رابکار می بریم.

	نیرو	طول	زمان
نماد	F	L	t
واحد	lb	ft	s

- درهردوسیستم کمیتهای فرعی برحسب کمیتهای اصلی تعریف می شوند.

1 ft= 12 in = 0.3048 m

1 lb =4.448 N

نیرو در SI: نیوتن N و در US با پوند lb تعیین می شود.

واحد جرم در سیستم US اسلاگ است

که به صورت زیر تعریف می شود.

$$F = ma$$

$$1_{\text{slug}} = \frac{1\ lb}{1\ ft/s^2}$$

در جداول صفحات بعد برخی از واحدهای مهم و نحوه تبدیل آن‌ها به یکدیگر آورده شده است.

Conversion Factors

U.S. Customary Units to SI Units

To convert from	To	Multiply by
(*Acceleration*)		
foot/second^2 (ft/sec^2)	meter/second^2 (m/s^2)	3.048×10^{-1}*
inch/second^2 (in./sec^2)	meter/second^2 (m/s^2)	2.54×10^{-2}*
(*Area*)		
foot^2 (ft^2)	meter^2 (m^2)	9.2903×10^{-2}
inch^2 (in.^{2})	meter^2 (m^2)	6.4516×10^{-4}*
(*Density*)		
pound mass/inch^3 (lbm/in.^{3})	kilogram/meter^3 (kg/m^3)	2.7680×10^{4}
pound mass/foot^3 (lbm/ft^3)	kilogram/meter^3 (kg/m^3)	1.6018×10
(*Force*)		
kip (1000 lb)	newton (N)	4.4482×10^{3}
pound force (lb)	newton (N)	4.4482
(*Length*)		
foot (ft)	meter (m)	3.048×10^{-1}*
inch (in.)	meter (m)	2.54×10^{-2}*
mile (mi), (U.S. statute)	meter (m)	1.6093×10^{3}
mile (mi), (international nautical)	meter (m)	1.852×10^{3}*
(*Mass*)		
pound mass (lbm)	kilogram (kg)	4.5359×10^{-1}
slug (lb-sec^2/ft)	kilogram (kg)	1.4594×10
ton (2000 lbm)	kilogram (kg)	9.0718×10^{2}
(*Moment of force*)		
pound-foot (lb-ft)	newton-meter (N · m)	1.3558
pound-inch (lb-in.)	newton-meter (N · m)	0.1129 8
(*Moment of inertia, area*)		
inch^4	meter^4 (m^4)	41.623×10^{-8}
(*Moment of inertia, mass*)		
pound-foot-second^2 (lb-ft-sec^2)	kilogram-meter^2 (kg · m^2)	1.3558
(*Momentum, linear*)		
pound-second (lb-sec)	kilogram-meter/second (kg · m/s)	4.4482
(*Momentum, angular*)		
pound-foot-second (lb-ft-sec)	newton-meter-second (kg · m^2/s)	1.3558
(*Power*)		
foot-pound/minute (ft-lb/min)	watt (W)	2.2597×10^{-2}
horsepower (550 ft-lb/sec)	watt (W)	7.4570×10^{2}
(*Pressure, stress*)		
atmosphere (std)(14.7 lb/in.^{2})	newton/meter^2 (N/m^2 or Pa)	1.0133×10^{5}
pound/foot^2 (lb/ft^2)	newton/meter^2 (N/m^2 or Pa)	4.7880×10
pound/inch^2 (lb/in.^{2} or psi)	newton/meter^2 (N/m^2 or Pa)	6.8948×10^{3}
(*Spring constant*)		
pound/inch (lb/in.)	newton/meter (N/m)	1.7513×10^{2}
(*Velocity*)		
foot/second (ft/sec)	meter/second (m/s)	3.048×10^{-1}*
knot (nautical mi/hr)	meter/second (m/s)	5.1444×10^{-1}
mile/hour (mi/hr)	meter/second (m/s)	4.4704×10^{-1}*
mile/hour (mi/hr)	kilometer/hour (km/h)	1.6093
(*Volume*)		
foot^3 (ft^3)	meter^3 (m^3)	2.8317×10^{-2}
inch^3 (in.^{3})	meter^3 (m^3)	1.6387×10^{-5}
(*Work, Energy*)		
British thermal unit (BTU)	joule (J)	1.0551×10^{3}
foot-pound force (ft-lb)	joule (J)	1.3558
kilowatt-hour (kw-h)	joule (J)	3.60×10^{6}*

*Exact value

مهدی بنائی

استاتیک

SI Units Used in Mechanics

Quantity	Unit	SI Symbol
(*Base Units*)		
Length	meter*	m
Mass	kilogram	kg
Time	second	s
(*Derived Units*)		
Acceleration, linear	meter/second^2	m/s^2
Acceleration, angular	radian/second^2	rad/s^2
Area	meter^2	m^2
Density	kilogram/meter^3	kg/m^3
Force	newton	N (= kg · m/s^2)
Frequency	hertz	Hz (= 1/s)
Impulse, linear	newton-second	N · s
Impulse, angular	newton-meter-second	N · m · s
Moment of force	newton-meter	N · m
Moment of inertia, area	meter^4	m^4
Moment of inertia, mass	kilogram-meter^2	kg · m^2
Momentum, linear	kilogram-meter/second	kg · m/s (= N · s)
Momentum, angular	kilogram-meter^2/second	kg · m^2/s (= N · m · s)
Power	watt	W (= J/s = N · m/s)
Pressure, stress	pascal	Pa (= N/m^2)
Product of inertia, area	meter^4	m^4
Product of inertia, mass	kilogram-meter^2	kg · m^2
Spring constant	newton/meter	N/m
Velocity, linear	meter/second	m/s
Velocity, angular	radian/second	rad/s
Volume	meter^3	m^3
Work, energy	joule	J (= N · m)
(*Supplementary and Other Acceptable Units*)		
Distance (navigation)	nautical mile	(= 1,852 km)
Mass	ton (metric)	t (= 1000 kg)
Plane angle	degrees (decimal)	°
Plane angle	radian	—
Speed	knot	(1.852 km/h)
Time	day	d
Time	hour	h
Time	minute	min

*Also spelled *metre*.

Systems of Units

Name	Length	Time	Mass	Force
International System of Units SI	meter m	second s	kilogram kg	newton* N $\left(\frac{kg \cdot m}{s^2}\right)$
U.S. Customary FPS	foot ft	second s	slug* $\left(\frac{lb \cdot s^2}{ft}\right)$	pound lb

*Derived unit.

Conversion Factors

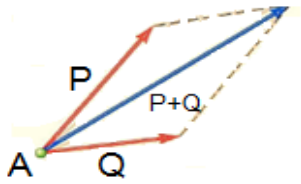
Quantity	Unit of Measurement (FPS)	Equals	Unit of Measurement (SI)
Force	lb		4.448 N
Mass	slug		14.59 kg
Length	ft		0.3048 m

Prefixes

	Exponential Form	Prefix	SI Symbol
Multiple			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
Submultiple			
0.001	10^{-3}	milli	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

فصل دوم

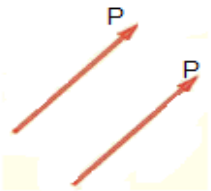
بردار ها



- بردار: کمیتی است که دارای اندازه و جهت است.

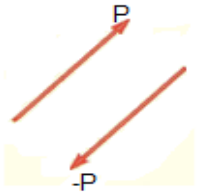
  بردارها طبق قوانین برداری با هم جمع می شوند.

- اسکالر: کمیتهایی که فقط دارای مقدار هستند و طبق قوانین جبری باهم جمع و تفریق می شوند. مثلا:جرم – حجم - دما
- طبقه بندی بردارها:



i. بردارهای ثابت و مقید،که نقطه اثرآن کاملا معین شده است وفقط یک موقعیت خاص را درفضا اشغال می کنند(مثل اثر نیرو روی جسم غیر صلب).

ii. بردارهای آزاد، که عمل آنها محدود به یک خط منحصربفرد درفضا نمی باشد(مثل بردارهای میدان جاذبه و مغناطیس).



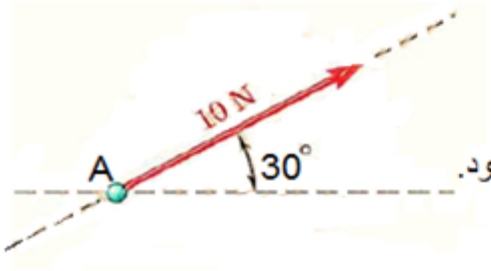
iii. بردارهای لغزان،که برای عمل آنها یک خط منحصربفرد وجود دارد و درآن امتداد اثر می کنند(مثل بردار نیروی خارجی روی یک جسم صلب).

- بردارهای برابر، دارای بزرگی و جهت یکسان اند.
- *بردارهای منفی، دارای بزرگی برابر اما جهت مخالفند.*

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

برآیند دو نیرو(R)

نیرو:عمل یا کنش یک جسم روي جسم دیگر است. نیرو کمیتی است برداري و کنش آن با مقدار، جهت و نقطه اثرش مشخص می شود.



- نیرو کمیتی برداری است.

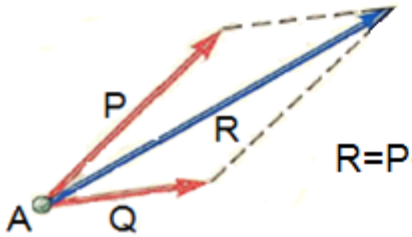
برای جمع کردن نیروها باید از قوانین جمع برداری استفاده نمود.
به طور کلی برای جمع کردن نیروها دو روش وجود دارد که عبارتند از:

1. روش ترسیمی
2. روش تحلیلی

ابتدا به تشریح روش ترسیمی می پردازیم و در قسمت های بعد روش تحلیلی را نیز بیان خواهیم کرد.
روش ترسیمی خود به دو روش تقسیم می شود که عبارتند از:قانون متوازی الاضلاع و قانون مثلث.

✓ قانون متوازی الاضلاع برای جمع بردارها:

دو نیروی (P و Q) اعمال شده بر یک ذره (A) را میتوان بایک نیروی منفرد که بر آیند آن دو نیرو نامیده میشود (R) جایگزین کرد. برآیند دو نیرو از طریق ترسیم قطر متوازی الاضلاعی که دو ضلع آن را دو خط مساوی با دو نیروی داده شده تشکیل می دهند، بدست می آید.



R=P+Q

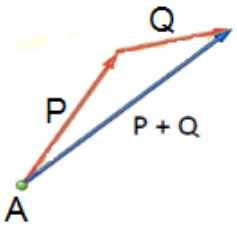
مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

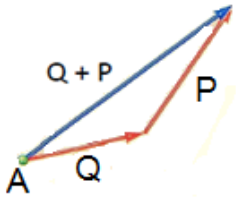
جمع بردارها

- قاعده مثلث برای جمع بردارها

برای جمع بردارها به روش مثلث از یک نقطه انتخابی در صفحه برداری برابر و همجهت با بردار اول ترسیم می کنیم سپس از انتهای بردار اول بردار دوم را برابر و همجهت با بردار دوم ترسیم می کنیم سپس ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می کنیم، بردار به دست امده همان بردار برایند می باشد

- جمع بردارها دارای خاصیت جابجایی می باشد.

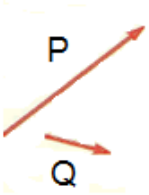


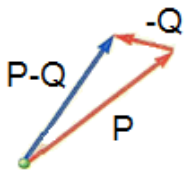


$$P + Q = Q + P$$

- تفریق بردارها

تفریق یا تفاضل بردارها با استفاده از همان قوانین جمع بردارها انجام می شود فقط با این تفاوت که علامت بردار دوم قرینه می شود یا به عبارتی جهت بردار دوم قرینه می شود و همان قوانین جمع بردارها را برای آنها می توان استفاده کرد.

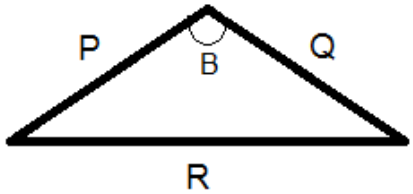




در مثلث از قوانین هندسه دو قانون مهم وجود دارد که عبارتند از: قانون کسینوسها و قانون سینوسها. از این دو قانون می توان برای حل برخی از مسائل استاتیک برای به دست آوردن نیروهای مجهول استفاده کرد. در زیر این دو قانون آورده شده اند و در ادامه در مثالها با کاربرد آن آشنا خواهیم شد.

- قانون کسینوسها

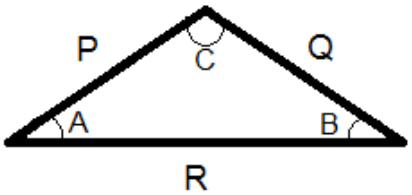
در یک مثلث به ابعاد Q ، P و R به صورت شکل زیر رابطه زیر برقرار است.



$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$R = P + Q$$

- قانون سینوسها

در یک مثلث به ابعاد Q ، P و R به صورت شکل زیر رابطه زیر برقرار است.

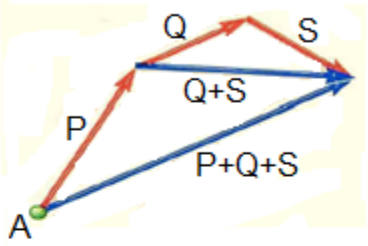


$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{P} = \frac{\sin C}{R}$$

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

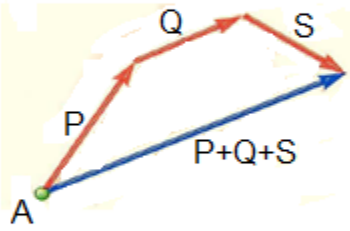
جمع بردارها

- جمع سه یا تعداد بیشتری بردار با قاعده مثلثی.



برای جمع کردن سه یا تعداد بیشتری بردار می توان از قانون مثلث برای هر دو بردار استفاده نمود و برایند دو بردار را با بردار سوم جمع کرد و به همین ترتیب ادامه داد تا برایند همه بردارها به دست آید

- قاعده چند ضلعی برای جمع سه یا تعداد بیشتری بردار.



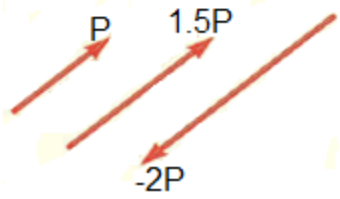
هنگامیکه بخواهیم بیش از دو نیرو را با هم جمع کنیم می توان از قانون مثلث به طور پی در پی استفاده نمود و در نهایت ابتدای بردار اول را با انتهای بردار آخر وصل کرد که این بردار همان بردار برایند خواهد بود.

- جمع بردارها دارای خاصیت شرکت پذیری می باشد.

$$Q + P + S = (P + Q) + S = P + (Q+S)$$

- ضرب یک عدد در بردار

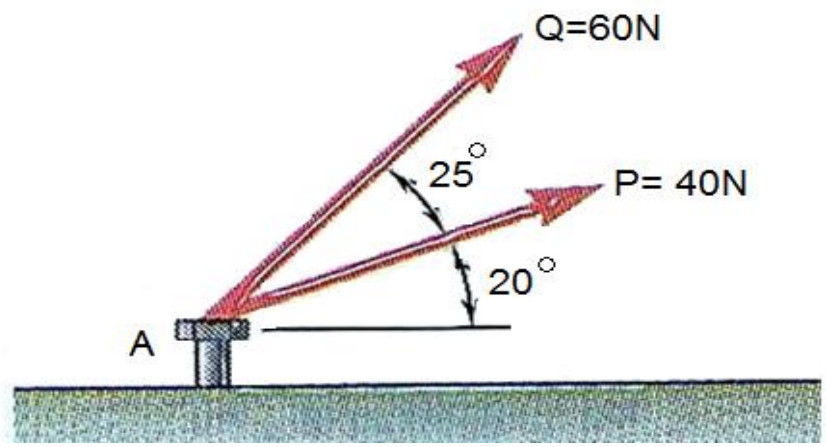
اگر یک عدد مثبت در یک بردار ضرب شود تنها مقدار آن در عدد مورد نظر ضرب می شود یعنی بردار حاصل برداری است در جهت بردار اول ولی دارای مقداری متفاوت.



ولی اگر عددی منفی در یک بردار ضرب شود بردار حاصل برداری خواهد بود در خلاف جهت بردار اول و دارای مقداری متفاوت.

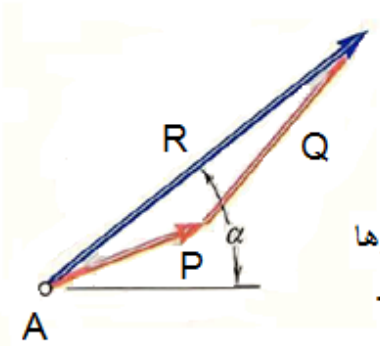
مثال ۱

- مطلوبست برآیند دو نیروی وارد بر پیچ A.



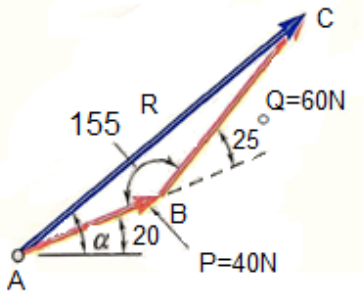
مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

مثال ۱



از آنجایی که تعداد نیروهای مسئله 3 عدد می باشد می توان با استفاده از قانون مثلث، مثلث نیروها را تشکیل داده و با استفاده از روابط کسینوسها و سینوسها در مثلث مقدار و جهت نیروی برایند را به صورت زیر به دست آورد.

برای استفاده از قانون کسینوسها و سینوسها کافی است که در مثلث نیروها مقادیر اضلاع معلوم و زاویه بین اضلاع را تعیین نمود و سپس از روابط استفاده کرد لذا خواهیم داشت:



- بزرگی برآیند باکمک قانون کسینوسها:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$R^2 = (40\text{N})^2 + (60\text{N})^2 - 2(40\text{N})(60\text{N})\cos 155^\circ$$
$$R^2 = 1600\text{N}^2 + 3600\text{N}^2 - 4800\text{N}^2 \times (-0.9)$$
$$R^2 = 1600\text{N}^2 + 3600\text{N}^2 + 4320\text{N}^2 = 9520\text{N}^2$$
$$R = \sqrt{9520\text{N}^2} = 97.57\text{N}$$
$$\boxed{R = 97.57\text{N}}$$

در اینجا مسئله حل نشده و تنها مقدار بردار برایند به دست آمد در ادامه باید با استفاده از قانون سینوسها جهت بردار برایند (زاویه آلفا در شکل) را نیز تعیین نمود

- زاویه برآیند باکمک قانون سینوسها:

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \Rightarrow \sin A = \sin B \frac{Q}{R} = \sin 155^\circ \frac{60\text{N}}{97.57\text{N}} = 0.422 \times 0.614 = 0.26$$

$$\Rightarrow A = \sin^{-1} 0.26 = 15.04^\circ$$

$$\alpha = 20^\circ + A = 20^\circ + 15.04^\circ = 35.04^\circ$$

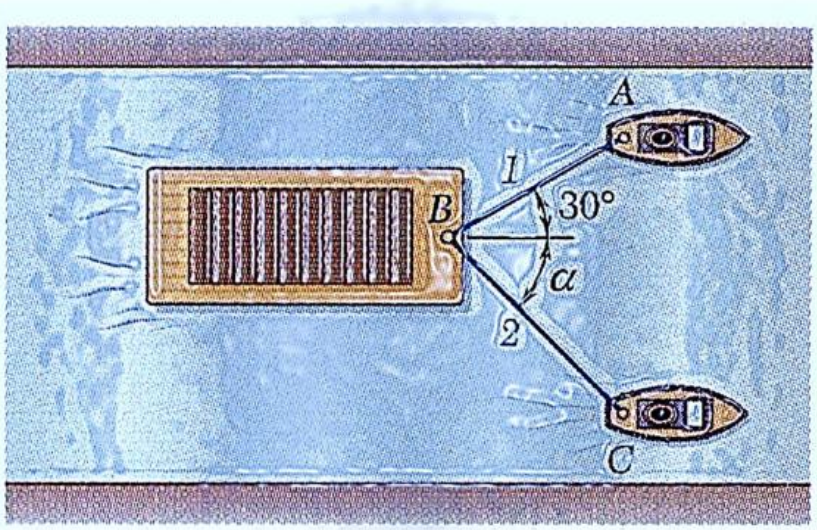
$$\boxed{\alpha = 35.04^\circ}$$

تمرین ۱: مثال ۱ را با استفاده از یک روش مثلثاتی نیز مجدداً حل کنید.

تمرین۲: مثال ۱ را برای زوایای ۳۰ و ۳۵ درجه نیز مجدداً حل نمایید.

مثال ۲

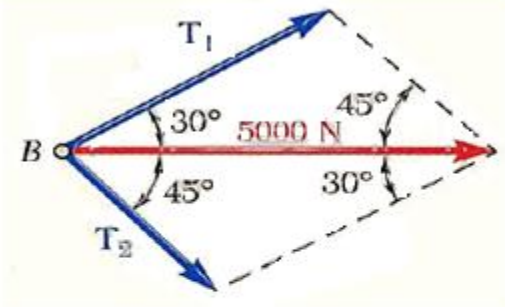
- مطلوبست نیروی وارد بر دوقایق کشندهٔ سکوی 5000N وقتی $\alpha=45^\circ$, $\alpha=60^\circ$.



مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

مثال ۲

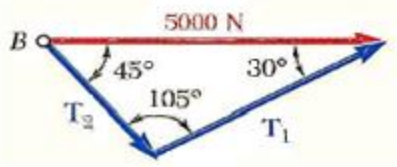
- دیاگرام جسم آزاد:



- باکمک قانون سینوسها خواهیم داشت:

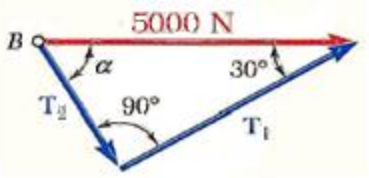
$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ}=\frac{T_2}{\sin 30^\circ}=\frac{5000\,\text{N}}{\sin 105^\circ}$$

$$T_1=3660\,\text{N} \quad T_2=2590\,\text{N}$$



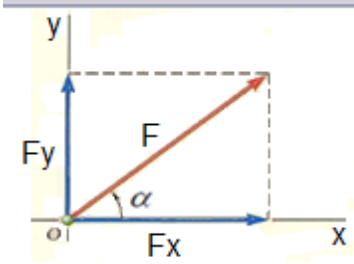
$$\frac{T_1}{\sin 60^\circ}=\frac{T_2}{\sin 30^\circ}=\frac{5000\text{N}}{\sin 90^\circ}$$

$$T_1=4330\,\text{N} \qquad T_2=2500\,\text{N}$$



تمرین ۳: در مثال ۲ مقدار زاویه α را به گونه‌ای بیابید که کشش در طناب ۲ حداقل شود.

مولفه های برداری عمودی (مستطیلی)- بردار های واحد

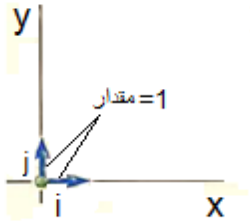


- عکس عمل جمع بردار ها را تجزیه گویند.

در اغلب مسائل بهتر است که نیروها را به دو مؤلفه متعامد در راستای محورهای مختصات تجزیه نمود

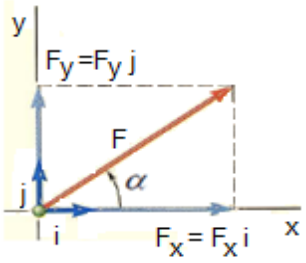
هر بردار مانند بردار در شکل روبه رو را که در یک صفحه واقع شده است می توان به دو مؤلفه F_x درجهت Xها و F_y درجهت Yها، تجزیه کرد.

$$F = F_x + F_y$$



بردار واحد یا یکه: بردار واحد در راستاي يك بردار، برابر يا بردار تقسيم بر بزرگي آن بردار مي باشد.
به عبارت ديگر, برداري كه داراي بزرگي واحد باشد بردار واحد ناميده مي شود.

بردار واحد در راستای محورx را با حرف i و در راستای محور y را با حرف j مشخص می کنند.



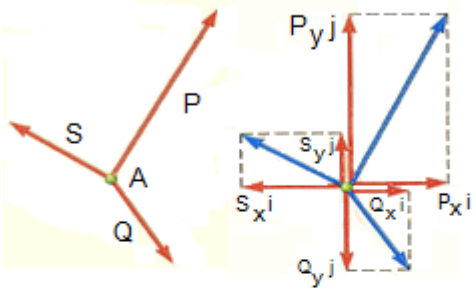
- اجزا بردار ها را برای بیان در مقیاس اسکالر در بردار های واحد ضرب می کنند.

$$F = F_x i + F_y j$$

مقدار بردار — جهت بردار

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

عملیات جمع روی بردار ها بوسیله تجزیه به مولفه ها



روش تحلیلی جمع بردارها

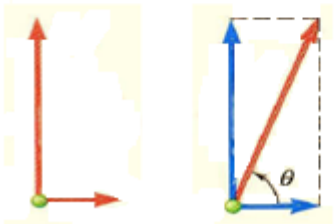
- روشی مطلوب برای تعیین برآیند سه یا تعداد بیشتر بردار تجزیه هر بردار به مولفه های قائم آن و جمع مولفه ها باهم می باشد.

$$R = P + Q + S$$

$$R_x i + R_y j = P_x i + P_y j + Q_x i + Q_y j + S_x i + S_y j =$$
$$= (P_x + Q_x + S_x) i + (P_y + Q_y + S_y) j$$

سپس مؤلفه های راستای Xرا با هم و مؤلفه های راستای y را با هم جمع می کنیم

- اجزا اسکالر برآیند در واقع از مجموع مولفه های عمودی بردار ها بدست آمده اند.

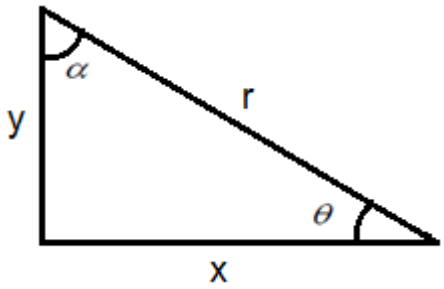


$$R_x = P_x + Q_x + S_x = \sum F_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y = \sum F_y$$

- برای پیدا کردن بزرگی بردار برآیند و نیز زاویه آن با افق:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

برای محاسبه مؤلفه های قائم یک بردار از روابط مثلثاتی به صورت زیر استفاده می‌شود.



$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} \qquad \sin\propto = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} \qquad \cos\propto = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$$

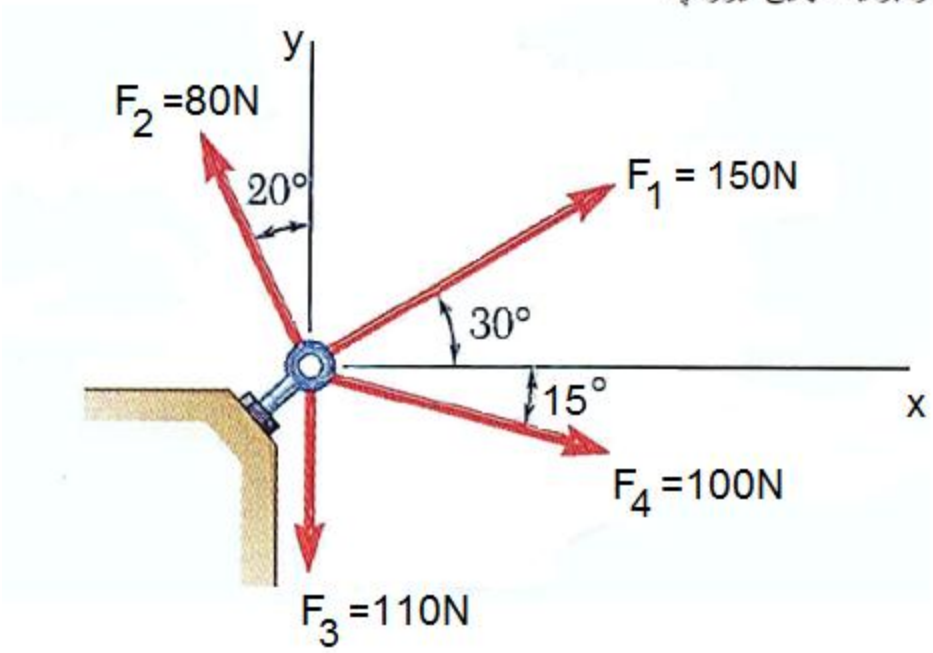
$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \qquad \tan\propto = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\sin\propto}{\cos\propto} = \frac{x}{y}$$

در زیر برخی از زوایای مثلثاتی معروف آورده شده است.

θ	Sin θ	Cos θ	tan θ
0	0	1	0
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	1	0	∞

مثال ۳

- برای گیره مقابل مقدار برآیند نهایی نیرو چه مقدار است؟



با توجه به اینکه زاویه بردارها با محورهای مختصات معلوم است می‌توان از روش تحلیلی استفاده کرد.لذا هر کدام از نیروها را با استفاده از روابط مثلثاتی که در قسمت قبل توضیح داده شد به مؤلفه‌های قائمشدر راستای محورهای x و y تجزیه می‌کنیم و سپس با جمع کردن هر کدام از مؤلفه‌ها برایند نیروها را بدستمی‌آوریم. از نیروی F_1 شروع می‌کنیم و به ترتیب تا نیروی F_4 ادامه می‌دهیم قبل از انجام محاسبات ابتدا زوایای هر کدام از نیروها را طبق شکل به دست می‌آوریم لذا خواهیم داشت:

$$\theta_1 = 30^\circ \text{ و } \theta_2 = 20^\circ \text{ و } \theta_3 = 90^\circ \text{ و } \theta_4 = 15^\circ$$

- باید توجه کرد که زاویه نیروی F_2 یعنی همان θ_2 نسبت به محور yها می‌باشد.

$$\text{نیروی } F_1 \begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos\theta_1 = 150N \times \cos 30 = 150N \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = +129.9N \\ F_{1y} = F_1 \sin\theta_1 = 150N \times \sin 30 = 150N \times \dfrac{1}{2} = +75N \end{cases}$$

$$\text{نیروی } F_2 \begin{cases} F_{2x} = F_2 \cos\theta_2 = 80N \times \sin 20 = 150N \times 0.342 = -27.4N \\ F_{2y} = F_2 \sin\theta_2 = 80N \times \cos 20 = 150N \times \frac{1}{2} = +75.2N \end{cases}$$

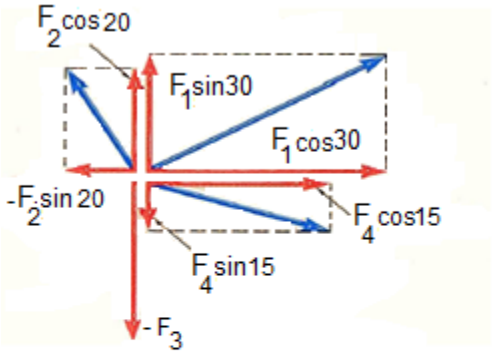
$$\text{نیروی } F_3 \begin{cases} F_{3x} = F_3 \cos\theta_3 = 110N \times \cos 90 = 150N \times 0 = 0N \\ F_{3y} = F_3 \sin\theta_3 = 110N \times \sin 90 = +110N \end{cases}$$

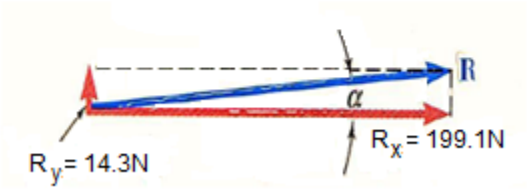
$$\text{نیروی } F_4 \begin{cases} F_{4x} = F_4 \cos\theta_4 = 100N \times \cos 15^\circ = 100N \times 0.966 = +96.6N \\ F_{4y} = F_4 \sin\theta_4 = 100N \times \sin 15^\circ = 100N \times 0.259 = -25.9N \end{cases}$$

حال مؤلفه‌های x را با هم و مؤلفه‌های y را با هم جمع می‌کنیم.

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 129.9N - 27.4N + 0 + 96.6N = 199.1N$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 75N + 75.2N + 110N - 25.9N = 14.3N$$





- نتیجه تجزیه:

بردارنیرو	بزرگی	مولفهٔ x	مولفهٔ y
F_1	150	+129.9	+75
F_2	80	-27.4	+75.2
F_3	110	0	-110
F_4	100	+96.6	-25.9
R	---	+199.1	+14.3

- محاسبه بزرگی و جهت:

$$R = \sqrt{199.1^2 + 14.3^2} \qquad \boxed{R = 199.6N}$$

$$\tan\alpha = \frac{14.3\,N}{199.1\,N} \qquad \boxed{\alpha = 4.1^\circ}$$

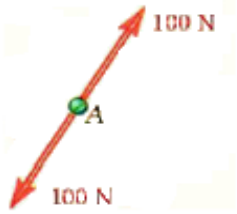
$R_x = R\cos\alpha = 199.6 \times 0.997 = 199.1N$

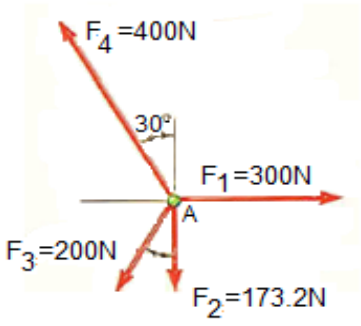
$R_y = R\sin\alpha = 199.6 \times 0.071 = 14.3N$ OK

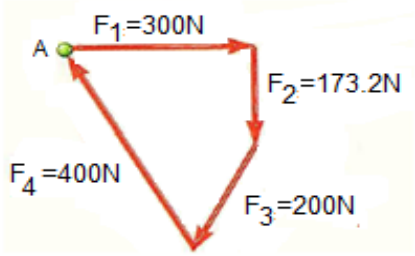
تمرین ۳: با استفاده از قوانین تعادل و با توجه به مقادیر داده شده به صورت جبری نشان دهید برایند نیروهای وارد بر نقطه A برابر با صفر است.

تعادل یک ذره

- وقتی برآیند نیروها برابر صفر است ذره در تعادل است.







- ذره تحت اثر سه و یا تعداد بیشتری نیرو:
  - راه حل ترسیمی یک چند ضلعی بسته خواهد بود.
  - راه حل جبری(قوانین تعادل)

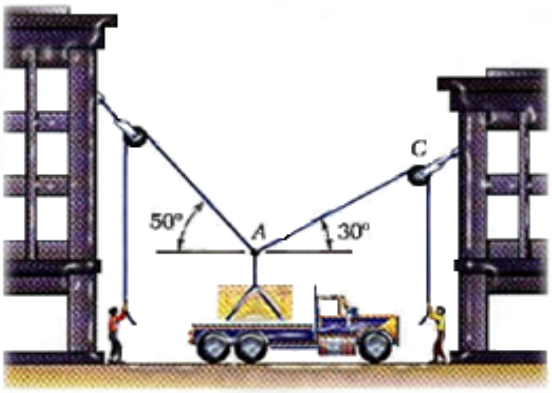
$$R = \Sigma F = 0$$

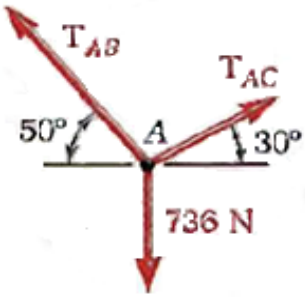
$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_x = 0$$

- ذره تحت اثر دو نیرو:
  - بزرگی برابر
  - خط اثر یکسان
  - جهت مخالف

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

دیاگرام جسم آزاد

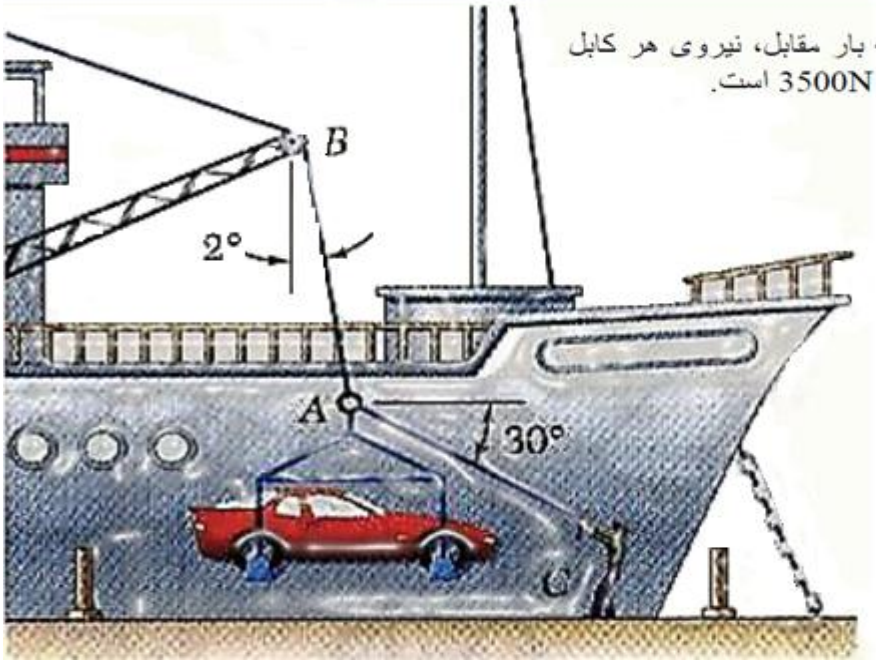




- دیاگرام جسم آزاد: نمایش طرحی ساده است که نیروهای وارد برذره رانشان می دهد.
- دیاگرام فضایی: نمایشی از یک طرح فیزیکی است که شرایط حاکم بر مسئله را نشان می دهد.
- توجه شود وقتی عضو درتعادل است تمام ذرات آن در تعادل خواهند بود.

همانطور که در شکل مشاهده می‌شود دیاگرام فضایی اغلب مسائل استاتیک پیچیده می‌باشد که این موضوع باعث دشواری ترسیم و همچنین نشان دادن نیروها در روی شکل و شلوغی شکل می‌شود لذا می‌توان با استفاده از دیاگرام جسم آزاد که در آن با توجه به بارهای موجود در دیاگرام جسم فضایی و نیروهای مجهول ذره‌ای به عنوان نماینده کل جسم در نظر گرفته شده است مسئله را به راحتی تحلیل کرده و نیروهای مجهول را با استفاده از روابط برداری و تحلیلی به دست آورد.

مثال ۴

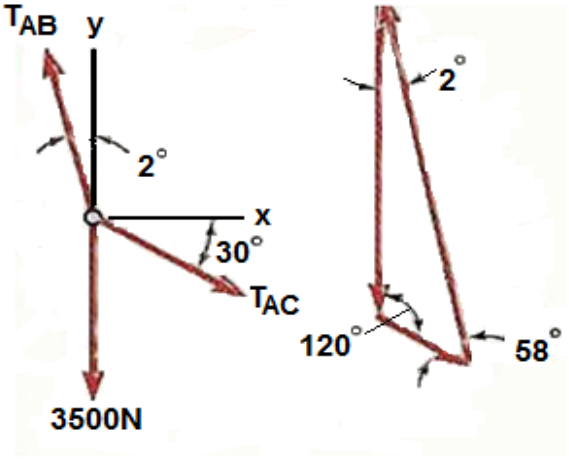


❑ باتوجه به شرایط تخلیه بار مقابل، نیروی هر کابل را بیابید. وزن اتومبیل 3500N است.

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

مثال ۴

- بارسم دیاگرام جسم آزاد مسئله درنقطه A:
- بااستفاده از قانون سینوسها:



$$T_{AB} = 3574.3N$$
$$T_{AC} = 122.5N$$

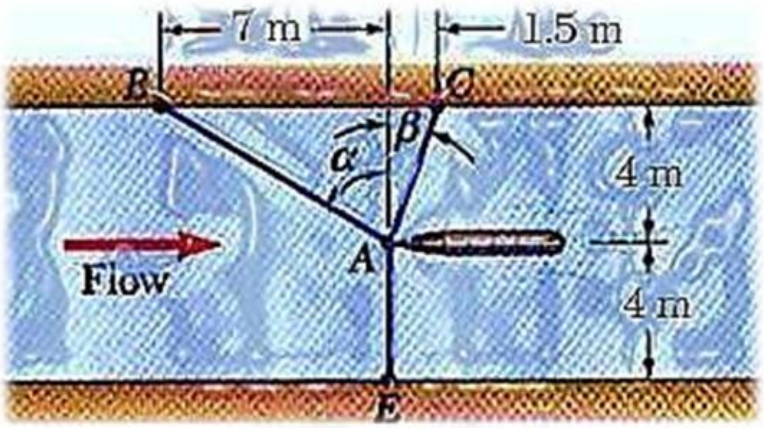
طبق قانون سینویها در مثلث مقابل داریم:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{3500\,\text{N}}{\sin 58^\circ}$$

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{3500\,\text{N}}{\sin 58^\circ} \Rightarrow \frac{T_{AB}}{0.866} = \frac{3500\,\text{N}}{0.848} \Rightarrow T_{AB} = \frac{3500N \times 0.866}{0.848} = 3574.3N$$

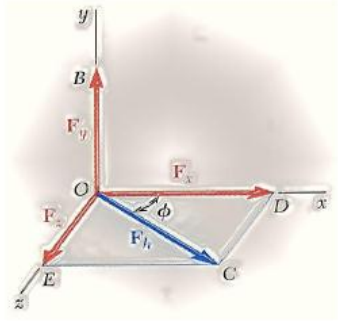
$$\frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{3500\,\text{N}}{\sin 58^\circ} \Rightarrow \frac{T_{AC}}{0.035} = \frac{3500\,\text{N}}{0.848} \Rightarrow T_{AC} = \frac{3500N \times 0.035}{0.848} = 122.5N$$

تمرین ٤: مطلوبست محاسبه نیروی وارد بر کابل AC و شناور در شکل زیر. نیروهای AE و AB به ترتیب برابر 40 N و 60 N اندازه‌گیری شده‌اند.



مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

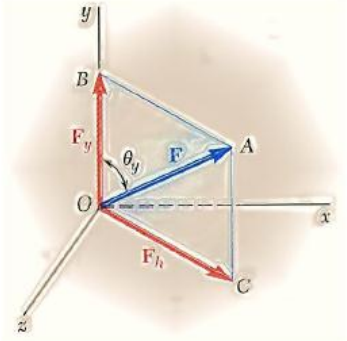
مولفه های عمودی در فضای سه بعدی



- تجزیه بردار F_h به دو مولفه عمود بر هم.

$$F_x = F_h \cos\phi = F \sin\theta_y \cos\phi$$

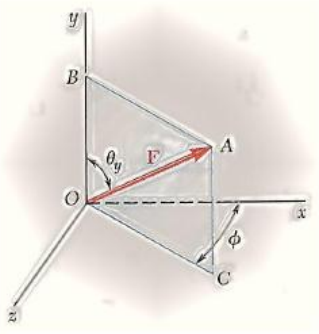
$$F_z = F_h \sin\phi = F \sin\theta_y \sin\phi$$



- تجزیه بردار به مولفه های عمودی و افقی.

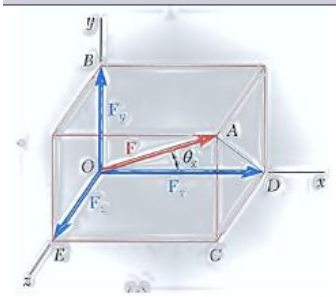
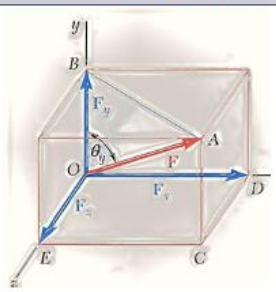
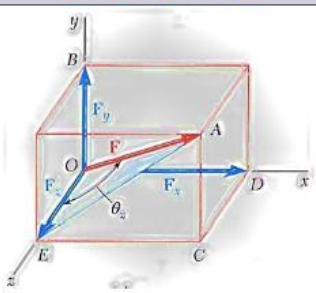
$$F_y = F\cos\theta_y$$

$$F_h = F\sin\theta_y$$



- بردار F در صفحه OBCA قرار دارد.

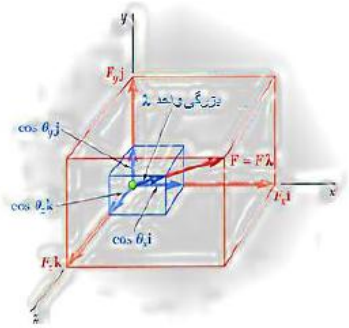
مولفه های عمودی در فضای سه بعدی

- با زاویه مابین بردار F و محورها:

$$F_x = F\cos\theta_x \quad F_y = F\cos\theta_y \quad F_z = F\cos\theta_z$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$
$$= F\left(\cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}\right)$$
$$= F\vec{\lambda}$$
$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}$$



- بردار λ یک بردار واحد درطول خط اثربردار F ودارای زوایای $\cos\theta_x$ و $\cos\theta_y$ و $\cos\theta_z$ بامحورهای اصلی بردار F

توجه: مجموع مربعات مؤلفه‌های یک بردار با مربع مقدار آن بردار برابر است، لذا داریم:

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1^2$$

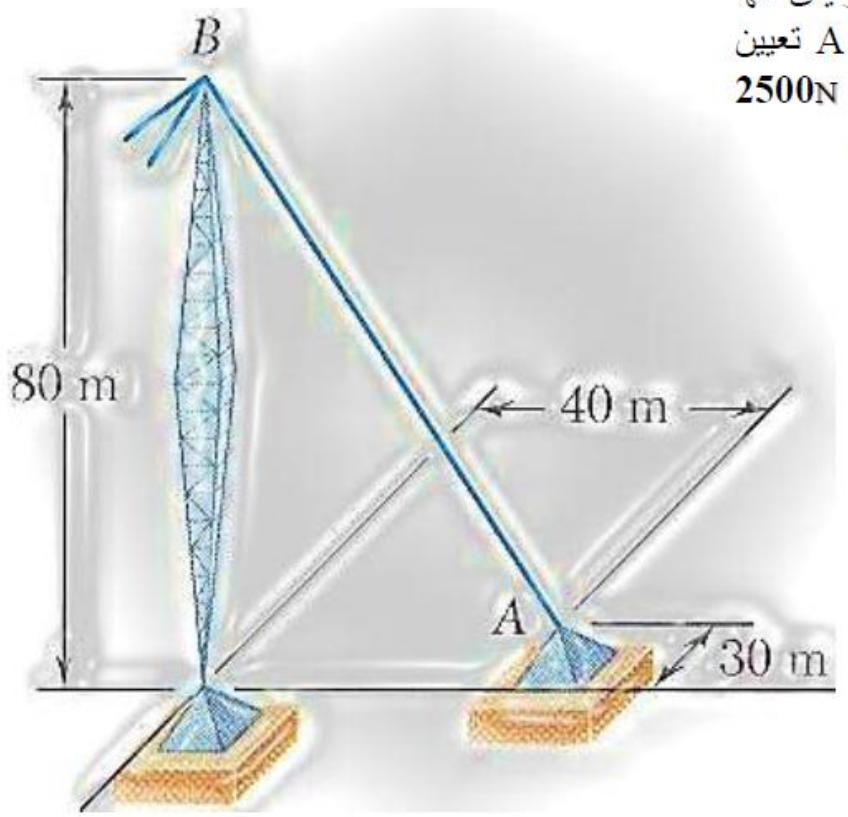
با جایگذاری مقادیر λ از قسمت قبل در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

مثال ۶

- مولفه های F_x و F_y و F_z ونیز زوایای آنها را با محور های اصلی در نقطه A تعیین کنید. کشش موجود در کابل برابر **2500N** است :

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ =?



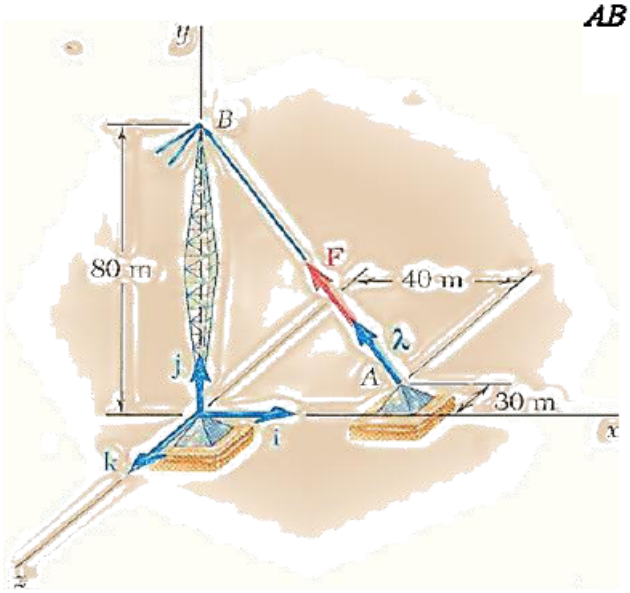
مثال ۶

- ابتدا طول کابل موردنظر را تعیین می کنیم.

$$\overrightarrow{AB} = (-40\,\text{m})\vec{i} + (80\,\text{m})\vec{j} + (30\,\text{m})\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{(-40\,\text{m})^2 + (80\,\text{m})^2 + (30\,\text{m})^2}$$

$$= 94.3\,\text{m}$$



- مقدار بردار یکه برابر است با:

$$\vec{\lambda} = \left(\frac{-40}{94.3}\right)\vec{i} + \left(\frac{80}{94.3}\right)\vec{j} + \left(\frac{30}{94.3}\right)\vec{k}$$

$$= -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

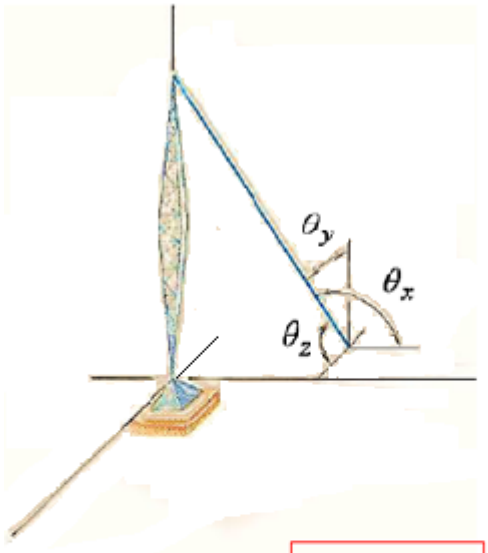
- مولفه های نیرو برابر است با:

$$\vec{F} = F\vec{\lambda}$$

$$= (2500\ \text{N})(-0.424\,\vec{i} + 0.848\,\vec{j} + 0.318\,\vec{k})$$

$$= (-1060\ \text{N})\vec{i} + (2120\ \text{N})\vec{j} + (795\ \text{N})\vec{k}$$

F_x F_y F_z



- تعیین مقدار زوایا:

$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x\,\vec{i} + \cos\theta_y\,\vec{j} + \cos\theta_z\,\vec{k}$$

$$= -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

$$\theta_x = 115.1^\circ$$

$$\theta_y = 32.0^\circ$$

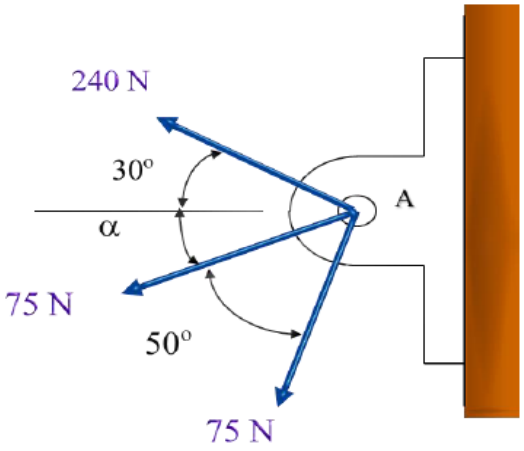
$$\theta_z = 71.5^\circ$$

$$\cos^{-1}(-0.424) = 115.1^\circ$$

ضرایب λ مقدار کسینوسهای هادی را مشخص میکنند.

مثال ۷

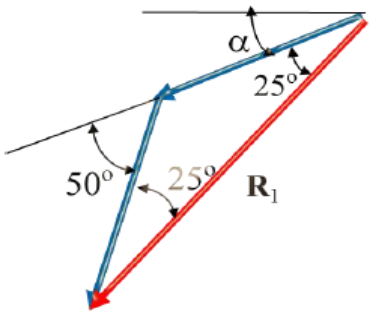
❑ در گیره ای زاویه بین دو نیروی 75N همیشه 50 درجه است.مقدار α را تعیین کنید.

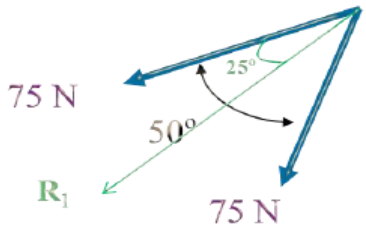


- ابتدا بردار برآیند دو نیروی 75Nرابدست می آوریم.سپس زاویه آن را با افق محاسبه می کنیم.

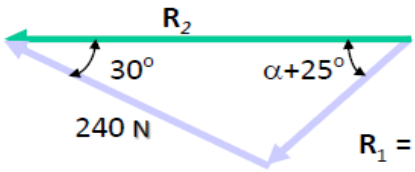
$$R_1 = 2(75\ \text{N})\cos 25^\circ = 135.95\ \text{N}$$

$$\mathbf{R}_1 = 135.95\ \text{N} \quad \alpha + 25^\circ$$





- قانون سینوسها را بین دو نیروی برآیند و 240N برقرار می کنیم.



$R_1 = 135.95\ N$

$$\frac{\sin(\alpha+25^\circ)}{240\ N} = \frac{\sin(30^\circ)}{135.95\ N}$$

$$\sin(\alpha+25^\circ) = \frac{(240\ N)\sin(30^\circ)}{135.95\ N} = 0.88270$$

$$\sin^{-1}(0.88270) = \alpha+25^\circ$$

$$\alpha + 25^\circ = 61.97^\circ$$

$$\alpha = 37.0^\circ$$

مولفه های عمودی در فضای سه بعدی

بردار اتصال M و N $\vec{d}$

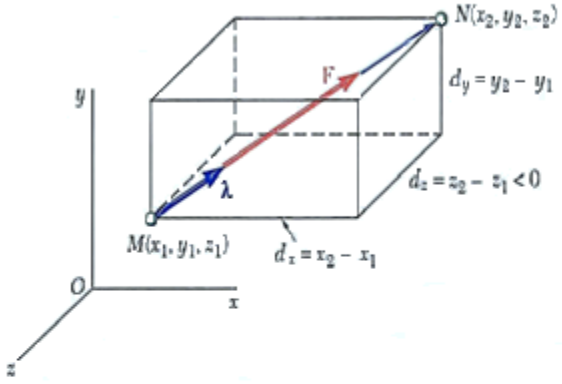
$$= d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$$

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

$$\vec{F} = F\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{d}\left(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}\right)$$

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$



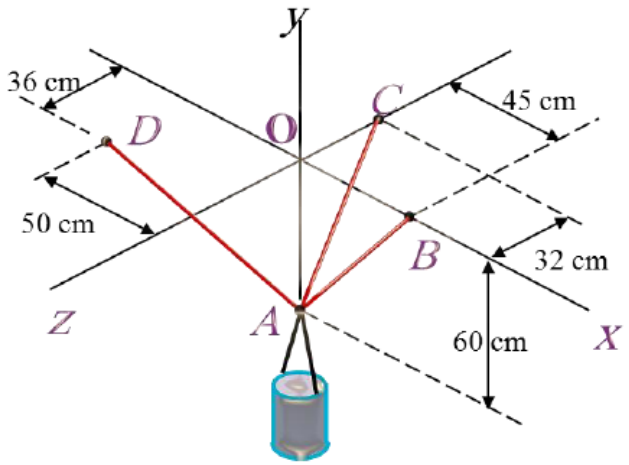
جهت بردار نیرو بوسیله دو نقطه تعیین شده است.

$$M(x_1, y_1, z_1) \quad و \quad N(x_2, y_2, z_2)$$

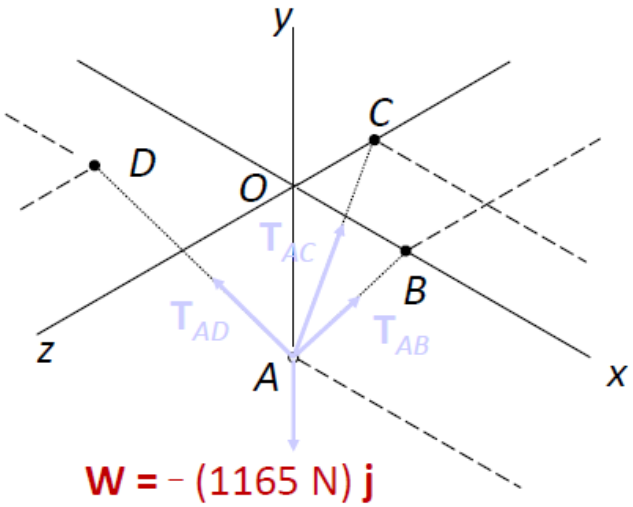
ضرایب λ مقدار کسینوسهای هادی را مشخص میکنند.

مثال ۸

❑ وزنه ای با وزن 1165N مطابق شکل از سقفی درحالت تعادل آویزان است مطلوبست میزان کشش در هر طناب.



- ابتدا دیاگرام جسم آزاد را رسم می کنیم.



$$\mathbf{W} = -(1165\ \mathrm{N})\,\mathbf{j}$$

- درحالت تعادل

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$
$$\mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AD} + \mathbf{W} = 0$$

- طول هر کابل

در صفحهٔ **XY**	$\longrightarrow$ $AB = (45)\mathbf{i} + (60)\mathbf{j}$	$AB = 75$ cm
در صفحهٔ **YZ**	$\longrightarrow$ $AC = (60)\mathbf{j} - (32)\mathbf{k}$	$AC = 68$ cm
در فضای **XYZ**	$\longrightarrow$ $AD = (-50)\mathbf{i} + (60)\mathbf{j} + (36)\mathbf{k}$	$AD = 86$ cm

- مقدار نیرو در هر کابل خواهد شد:

$$\mathbf{F} = F\lambda = (d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

$$\mathrm{T_{AB}} = T_{AB}\lambda_{AB} = \mathrm{T_{AB}}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = (\frac{45}{75}i - \frac{60}{75}j)\mathrm{T_{AB}} = (0.6i - 0.8j)\mathrm{T_{AB}}$$

$$\mathrm{T_{AC}} = T_{AC}\lambda_{AC} = \mathrm{T_{AC}}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = (\frac{60}{68}j - \frac{32}{68}K)\mathrm{T_{AC}} = (0.88\,j - 0.47K)\mathrm{T_{AC}}$$

$$\mathrm{T_{AD}} = T_{AD}\lambda_{AD} = \mathrm{T_{AD}}\frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = (-\frac{50}{86}i + \frac{60}{86}j + \frac{36}{86}K)\mathrm{T_{AD}} = (-0.58i + 0.7\,j + 0.42K)\mathrm{T_{AD}}$$

- باتوجه به معادله $\Sigma \mathbf{F} = 0$:

(i) $0.6\,T_{AB} - 0.58T_{AD} = 0$ $\qquad T_{AB} = 0.969\,T_{AD}$

(j) $0.8\,T_{AB} + 0.88T_{AC} + 0.7T_{AD} - 1165\ \mathrm{N} = 0$

(k) $-0.47T_{AC} + 0.42T_{AD} = 0$ $\qquad T_{AC} = 0.8895\,T_{AD}$

- جایگذاری معادلات i و k در j:

$$(0.8 \times 0.969 + 0.88 \times 0.8895)\,T_{AD} + 0.7T_{AD} - 1165\ \mathrm{N} = 0$$

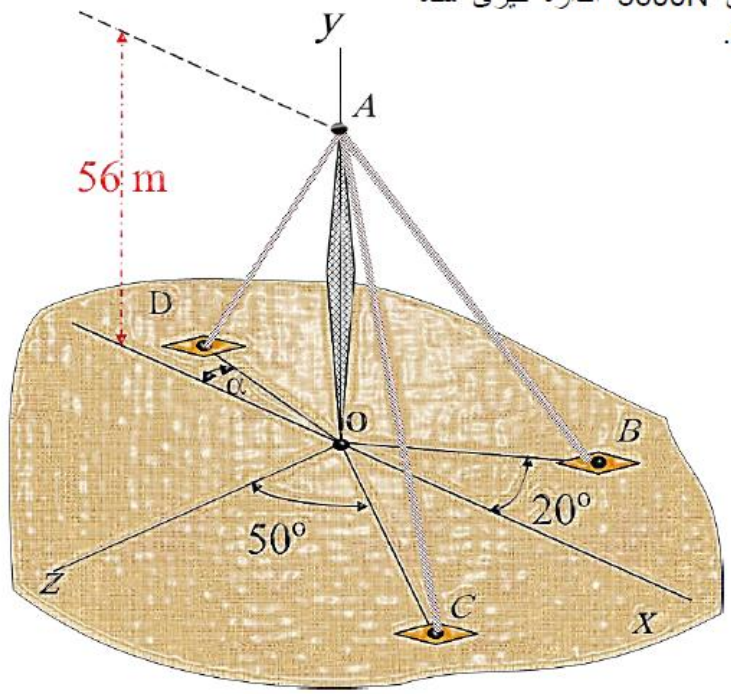
$2.2578\,T_{AD} - 1165\ \mathrm{N} = 0$ $\qquad \boxed{T_{AD} = 516\ \mathrm{N}}$

(i): $T_{AB} = 0.969\,(516\ \mathrm{N})$ $\qquad \boxed{T_{AB} = 500\ \mathrm{N}}$

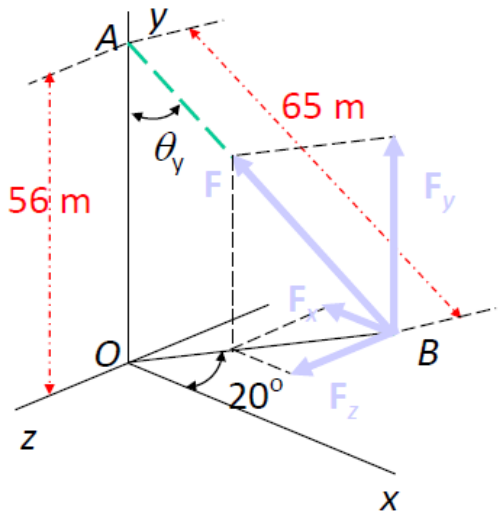
(k): $T_{AC} = 0.8895\,(516\ \mathrm{N})$ $\qquad \boxed{T_{AC} = 459\ \mathrm{N}}$

مثال ۹

❑ دکلی به ارتفاع 56m توسط سه کابل مهار شده است.اگرطول کابل ABبرابر 65m ونیروی کشش آن 3600N اندازه گیری شده باشد.مطلوبست تجزیه نیروی کابل AB.



- ابتدا دیاگرام جسم آزاد را رسم می کنیم.



- درمرحله دوم کسینوسهای هادی را تعیین می کنیم.

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_y}{F}$$

برای مثلث : AOB

$$\cos\theta_y = \frac{56\ \text{m}}{65\ \text{m}} = 0.86154 \qquad \boxed{\theta_y = 30.51^\circ}$$

- از تجزیه بردار در جهت محورهای عمود بر آن خواهیم داشت:

$$F_x = F_h \cos\phi = F \sin\theta_y \cos\phi$$
$$F_z = F_h \sin\phi = F \sin\theta_y \sin\phi$$

(a) $F_x = -F \sin\theta_y \cos 20^\circ$

$= -(3900\ \text{N}) \sin 30.51^\circ \cos 20^\circ$

$F_x = -1861\ \text{N}$

$F_y = +F \cos\theta_y = (3900\ \text{N})(0.86154)$ $\quad F_y = +3360\ \text{N}$

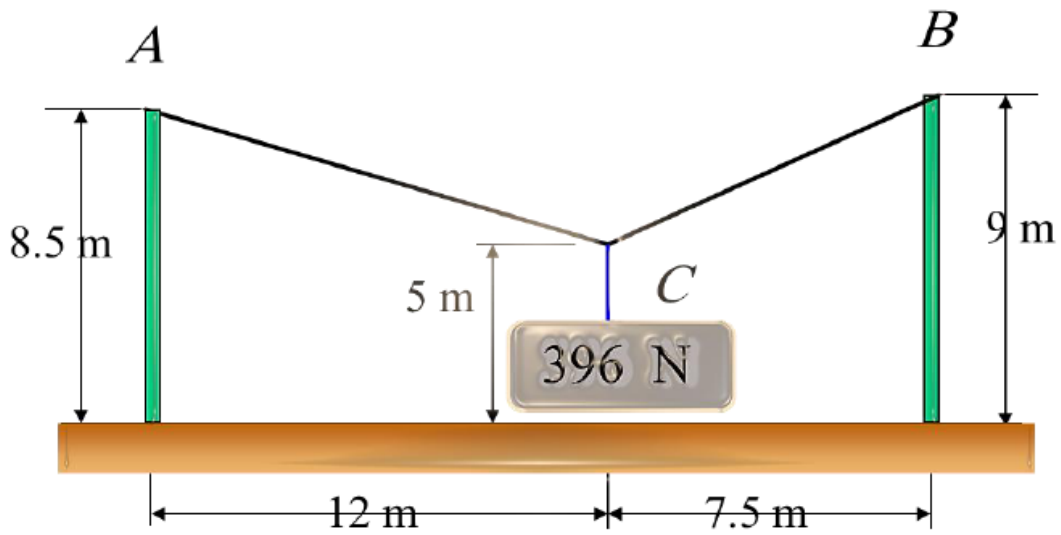
$F_z = +(3900\ \text{N}) \sin 30.51^\circ \sin 20^\circ$ $\quad F_z = +677\ \text{N}$

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1861\ \text{N}}{3900\ \text{N}} \qquad \cos\theta_x = -0.4771,\ \theta_x = 118.5^\circ$$

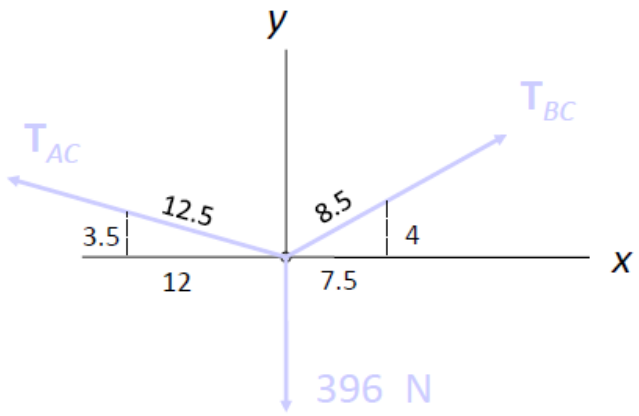
$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{677\ \text{N}}{3900\ \text{N}} \qquad \cos\theta_z = +0.1736,\ \theta_z = 80.0^\circ$$

مثال ۱۰

- مطلوبست کشش در دو کابل AC و BC .



- دیاگرام جسم آزاد



$$\Sigma F_x = 0 : -\frac{12}{12.5} T_{AC} + \frac{7.5}{8.5} T_{BC} = 0$$

$$T_{BC} = 1.088\ T_{AC}$$

$$\Sigma F_y = 0 : \frac{3.5}{12.5} T_{AC} + \frac{4}{8.5} T_{BC} - 396\ _N = 0$$

$$\frac{3.5}{12.5} T_{AC} + \frac{4}{8.5} (1.088\ T_{AC}) - 396\ _N = 0$$

$$(0.280 + 0.512)\ T_{AC} - 396\ _N = 0$$

$$T_{AC} = 500 \text{ kg}$$

$$T_{BC} = 1.088\ (500\ _N)$$

$$T_{BC} = 544 \text{ kg}$$

فصل سوم

اجسام صلب؛ سیستم نیروهای معادل

در فصل قبل ، هر جسمی را به صورت یک ذره در نظر گرفتیم ولی واقعیت این است که هر جسم از تعداد زیادی ذره تشکیل شده است و لذا نقاط اثر نیروها با هم متفاوت خواهد بود. در این فصل تأثیر نیروهای وارده بر اجسام صلب را بررسی و نحوه جایگزینی یک سیستم نیرویی داده شده را با یک سیستم نیرویی معادل مطالعه خواهیم کرد. در ابتدا نیروهای خارجی وارد شده بر یک جسم صلب را بررسی می‌کنیم. سپس اصل انتقال پذیری نیرو در اجسام صلب و مفهوم لنگر را توضیح خواهیم داد.

نیروهای خارجی و نیروهای داخلی

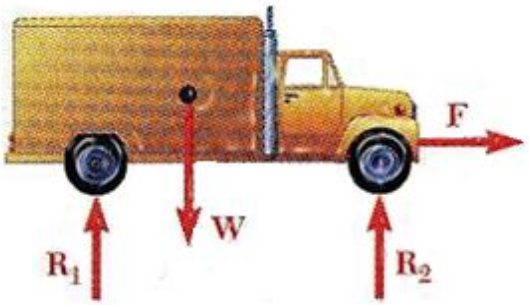
- عمل نیروها روی اجسام صلب به دو گروه تقسیم می شود:
  - نیروهای خارجی
  - نیروهای داخلی

نیروهای خارجی تأثیر سایر اجسام را بر جسم صلب مورد بررسی نشان می‌دهند مانند نیروی ناشی از بار یک دیوار روی یک تیر یا نیروی ناشی از یک اتومبیل بر روی یک پل و یا مانند نیرویی که در شکل زیر افراد به وسیله طناب به کامیون وارد می‌کنند وغیره. در درس بارگذاری با انواع مختلف بارهای وارده بر ساختمان که همان نیروهای خارجی می‌باشند آشنا خواهید شد.

نیروهای داخلی نیروهایی هستند که ذرات جسم صلب را در کنار یکدیگر نگه می‌دارند. مانند نیروهای بین مولکولی و نیروهای داخلی ایجاد شده در اعضای خرپا ها وقتی تحت اثر نیروهای خارجی قرار دارند.

در این فصل تنها به بررسی نیروهای خارجی خواهیم پرداخت.

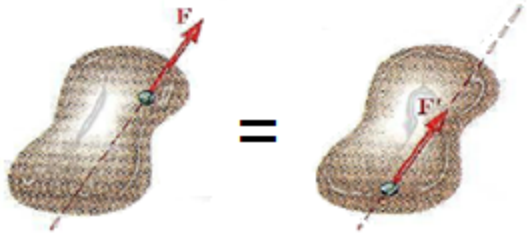
در شکل زیر نیروی های خارجی وارد شده بر کامیون مشخص شده است.



هر نیروی خارجی وارد شده به یک جسم صلب، در صورت عدم مخالفت سایر نیروها، می‌تواند جسم صلب را به صورت انتقالی، دورانی و یا هر دو، به حرکت در آورد.

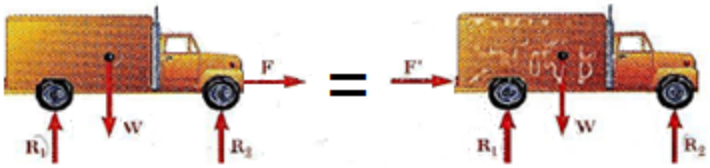
مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

اصل انتقال ; نیروهای هم ارز



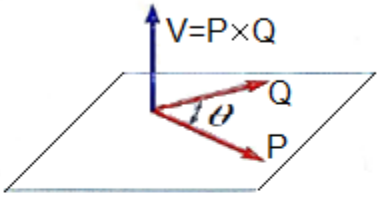
- طبق اصل انتقال پذیری می توان نیرو رابه موازات خودش به هرمکانی و ازجمله مبدا مختصات انتقال داد.اثر هم ارزی نیروها تنها برروی جسم صلب وجود دارد.

- انتقال نیروی F از سپر جلویی به سپر عقبی کامیون وقتی نیروی دیگری رو بدنه اثر نمی کند بیان هم ارزی نیروی جلویی با نیروی عقب کامیون است.



ضرب خارجی دو بردار

- مفهوم گشتاوریک نیرو توسط بردار تولید شده از عملیات ضرب خارجی مشخص می شود.



- بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار Pو Q بردار V است که با صفحه گذرنده از دو بردارديگر عمود است.
  - ✓ جهت بردار V با قانون دست راست تعیین می شود.
  - ✓ بزرگی بردار V برابر است با: $V = PQ\sin\theta$

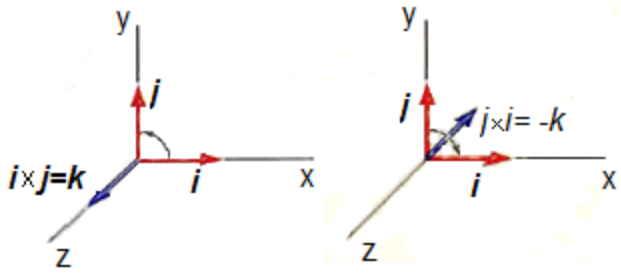
خاصیت‌های ضرب خارجی بردارها

- بدون خاصیت جابجایی $\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{P} = -(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})$
- دارای خاصیت توزیعی $\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2) = \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}_2$
- بدون خاصیت شرکت پذیری $(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})\times\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{S})$

ضرب خارجی مؤلفه‌های عمودی

- ضرب خارجی بردار های واحد

$$i \times i = 0 \quad j \times i = -k \quad k \times i = j$$
$$i \times j = k \quad j \times j = 0 \quad k \times j = -i$$
$$i \times k = -j \quad j \times k = i \quad k \times k = 0$$

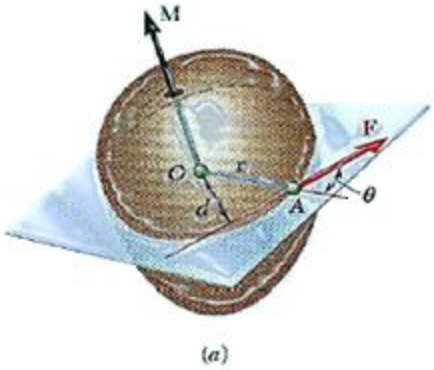


- حاصل ضرب خارجی بردار برحسب مولفه های مستطیلی

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

- یک بردار توسط بزرگی و جهتش تعریف می شود.درضمن تاثیرش روی جسم صلب به نقطه اثر آن بستگی دارد.



(a)

- گشتاور M حول O بصورت زیر تعریف می شود:

$$\boldsymbol{M_O = r \times F}$$

- بردارگشتاور M_o برداری عمود بر صفحه دربردارنده نقطه O ونیروی F است.
- بزرگی بردار M_o :

$$M_O = rF\sin\theta = Fd$$

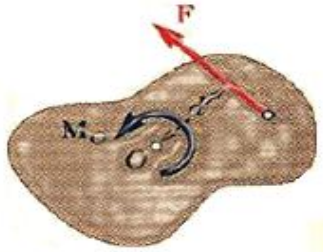
در واقع می‌توان گفت گشتاور یا لنگر یک نیرو حول یک نقطه برابر است با حاصلضرب مقدار نیرو در فاصله عمودی نقطه مورد نظر تا راستای خط اثر نیرو یعنی همان d در شکل بالا. به عبارتی مقدار گشتاور یک نیرو حول یک نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

نیرو×فاصله = گشتاور

(b)

جهت گشتاور توسط قانون دست راست تعیین شود.

برای تعیین جهت بردار لنگر با استفاده از قانون دست راست ابتدا چهار انگشت دست راست را در جهت بردار نیرو به گونه‌ای قرار می‌دهیم که کف دستمان به سمت نقطه‌ای که می‌خواهیم حول آن لنگر بگیریم باشد در این حالت اگر چهار انگشت خود را مشت کنیم جهت انگشت شست همان جهت لنگر می‌باشد.



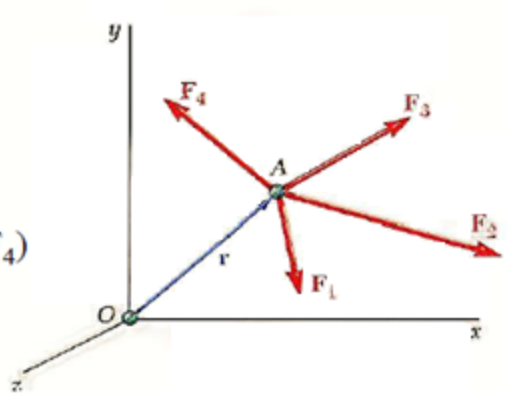
(a) $M_O = +Fd$

- هرگاه نیرو تمایل به گردش جسم بصورت پاد ساعتگرد داشته باشد مقداربزرگی گشتاور را بصورت قراردادی مثبت در نظر گرفته می شود.

(b) $M_O = -Fd$

- هرگاه نیرو تمایل به گردش جسم بصورت ساعتگرد داشته باشد مقداربزرگی گشتاور را بصورت قراردادی منفی در نظر گرفته می شود.

تئوری واریگنون (Varignon):



- گشتاور حاصل از چند نیرو حول یک نقطه برابر گشتاوری است که مجموع تمام نیروها حول آن نقطه ایجاد می کنند.

$$(F_1\times r)+(F_2\times r)+(F_3\times r)+(F_4\times r) = r\times(F_1+F_2+F_3+F_4)$$

- مطابق تئوری Varignon گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاورهای مولفه های نیرو حول همان نقطه است.

- برای محاسبه گشتاور دریک نقطه باید نیروی عمود بر محور گذرنده از آن نقطه را در نظر بگیریم.

$$M_o = (M_1)+(M_2)+(M_3)+(M_4)= (F_1\times r)+(F_2\times r)+(F_3\times r)+(F_4\times r) = r\times(F_1+F_2+F_3+F_4)$$

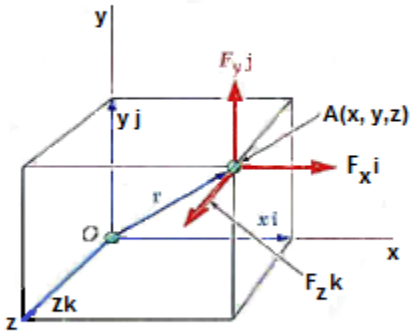
مؤلفه‌های مستطیلی گشتاور یک نیرو

- گشتاور F حول O در مبدا مختصات

$$M_O = r\times F,\quad r = xi+yj+zk$$

$$F = F_x i+F_y j+F_z k$$

$$M_O = M_x i+M_y j+M_z k$$



حال با جایگزاری مؤلفه‌های بردارهای r و F در رابطه بالا داریم:

$$M_o = (xi+yj+zk)\times(F_x i+F_y j+F_z k) =$$

$$= (xi\times F_x i+xi\times F_y j+xi\times F_z k)+(yj\times F_x i+yj\times F_y j+yj\times F_z k)+(zk\times F_x i+zk\times F_y j+zk\times F_z k) =$$

$$= \left(xF_x\overset{0}{\cancel{(i\times i)}}+xF_y(i\times j)+xF_z(i\times k)\right)+\left(yF_x(j\times i)+yF_y\overset{0}{\cancel{(j\times j)}}+yF_z(j\times k)\right)+\left(zF_x(k\times i)+zF_y(k\times j)+zF_z\overset{0}{\cancel{(k\times k)}}\right)=$$

$$= \underline{\underline{xF_y k}}-\underline{\underline{xF_z j}}-\underline{\underline{yF_x k}}+\underline{yF_z i}+\underline{\underline{zF_x j}}-\underline{zF_y i} = (yF_z-zF_y)i+(zF_x-xF_z)j+(xF_y-yF_x)k$$

عبارت به دست آمده برای M_o برابر با دترمینان زیر می‌باشد.

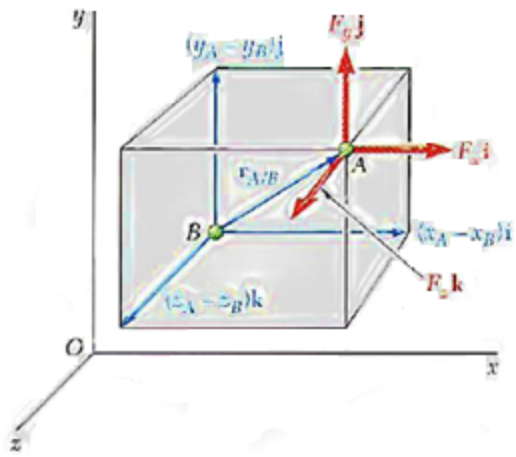
$$M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)i + (zF_x - xF_z)j + (xF_y - yF_x)k$$

مؤلفه‌های مستطیلی گشتاور یک نیرو نسبت به هر نقطه اختیاری در فضا

- گشتاور F حول B

$$M_B = r_{A/B} \times F$$

$$r_{A/B} = r_A - r_B$$
$$= (x_A - x_B)i + (y_A - y_B)j + (z_A - z_B)k$$
$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$



در این حالت تنها مؤلفه‌های بردار r تغییر می‌کند و ضرب خارجی دو بردار مانند قبل انجام می‌شود.

در این حالت مقدار گشتاور حول نقطه B برابر با دترمینان زیر خواهد بود.

$$M_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

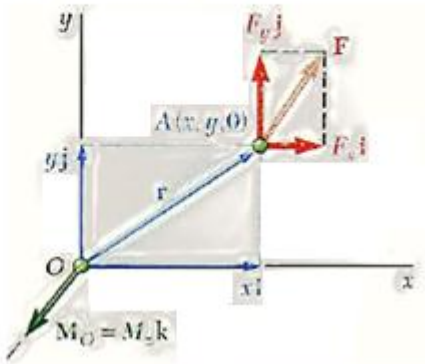
در فضای دو بعدی مؤلفه z نیرو و مختصات نقطه مورد نظر حذف می‌شود و حاصلضرب خارجی دو بردار r و M با دو مؤلفه x و y به دست می‌اید.

$$M_O = (xF_y - yF_x)k$$

$$M_O = M_Z$$

$$= xF_y - yF_x$$

$$M_O = \begin{vmatrix} i & j \\ x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

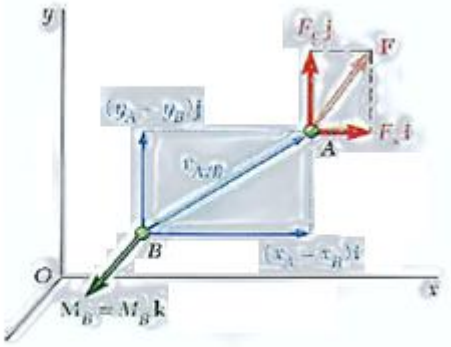


$$M_B = [(x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x]k$$

$$M_B = M_Z$$

$$= (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

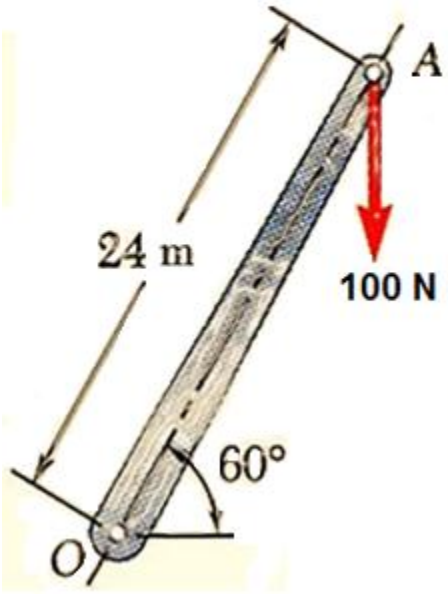
$$M_B = \begin{vmatrix} i & j \\ x_A - x_B & y_A - y_B \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$



در این حالت نیز مؤلفه‌های مستطیلی گشتاور نیرو برابر حاصل دترمینان‌های زیر خواهد بود.

مثال 1

نیروی 100N به انتهای یک شفت وارد می شود،مطلوبست:



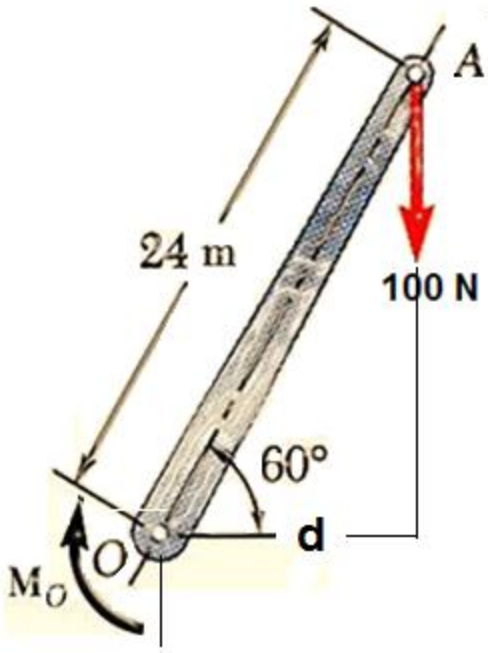
a) لنگر حول نقطه O

b) چه نیروی افقی در A اعمال شود تا لنگری مشابه ایجاد کند؟

c) کمترین نیرویی که می توان در A اعمال کرد تا لنگری مشابه بوجود آورد؟

d) موقعیت نیروی 240N بصورت عمود که لنگری مشابه بوجود آورد؟

a) لنگر نیروی 100N برابر فاصله عمودی این نیرو تا نقطه مورد نظر ضربدر مقدار بزرگی نیرو است.



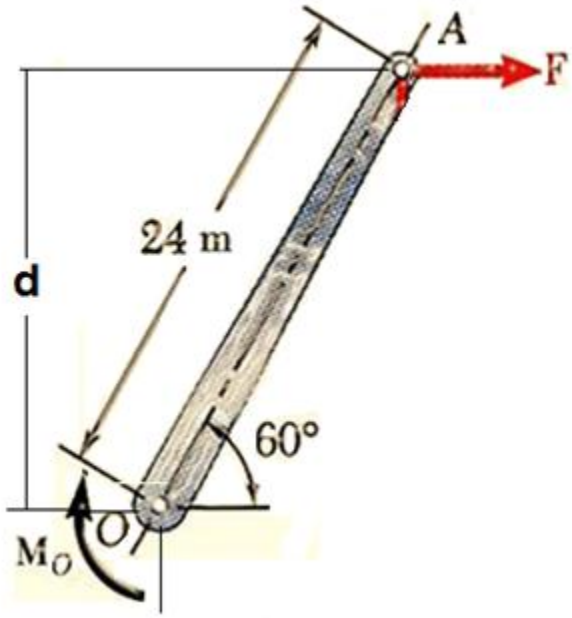
$$M_O = Fd$$

$$d = (24\ \text{m})\cos 60° = 12\ \text{m}$$

$$M_O = (100\ \text{N})(12\ \text{m})$$

$$M_O = 1200\ \text{N}\cdot\text{m}$$

b) نیروی افقی در A که لنگری مشابه ایجاد می کند



$$d = (24\ \text{m})\sin 60° = 20.8\ \text{m}$$

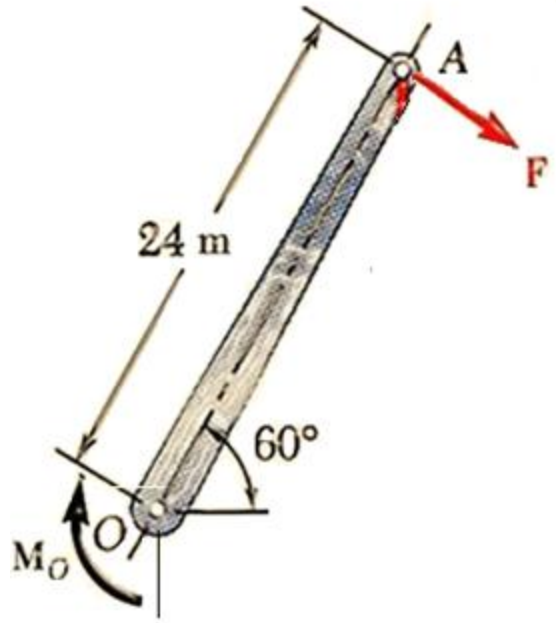
$$M_O = Fd$$

$$1200\ \text{N}\cdot\text{m} = F(20.8\ \text{m})$$

$$F = \frac{1200\ \text{N}\cdot\text{m}}{20.8\ \text{m}}$$

$$F = 57.7\ \text{N}$$

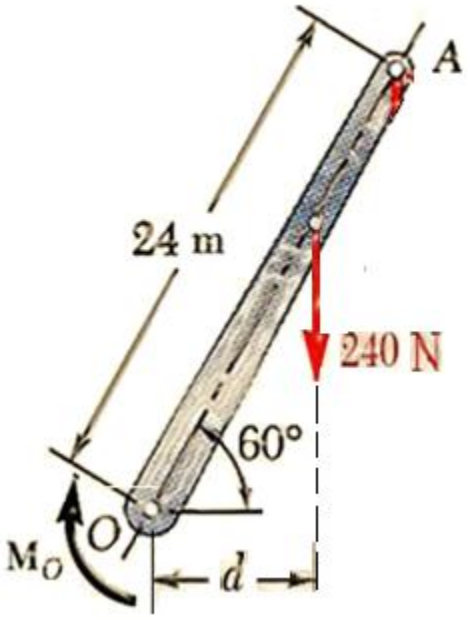
c) کمترین نیرویی که می توان در A اعمال کرد تا لنگری مشابه بوجود آورد:



$$M_O = Fd$$
$$1200\ \text{N}\cdot\text{m} = F(24\ \text{m})$$
$$F = \frac{1200\ \text{N}\cdot\text{m}}{24\ \text{m}}$$

$$F = 50\,\text{N}$$

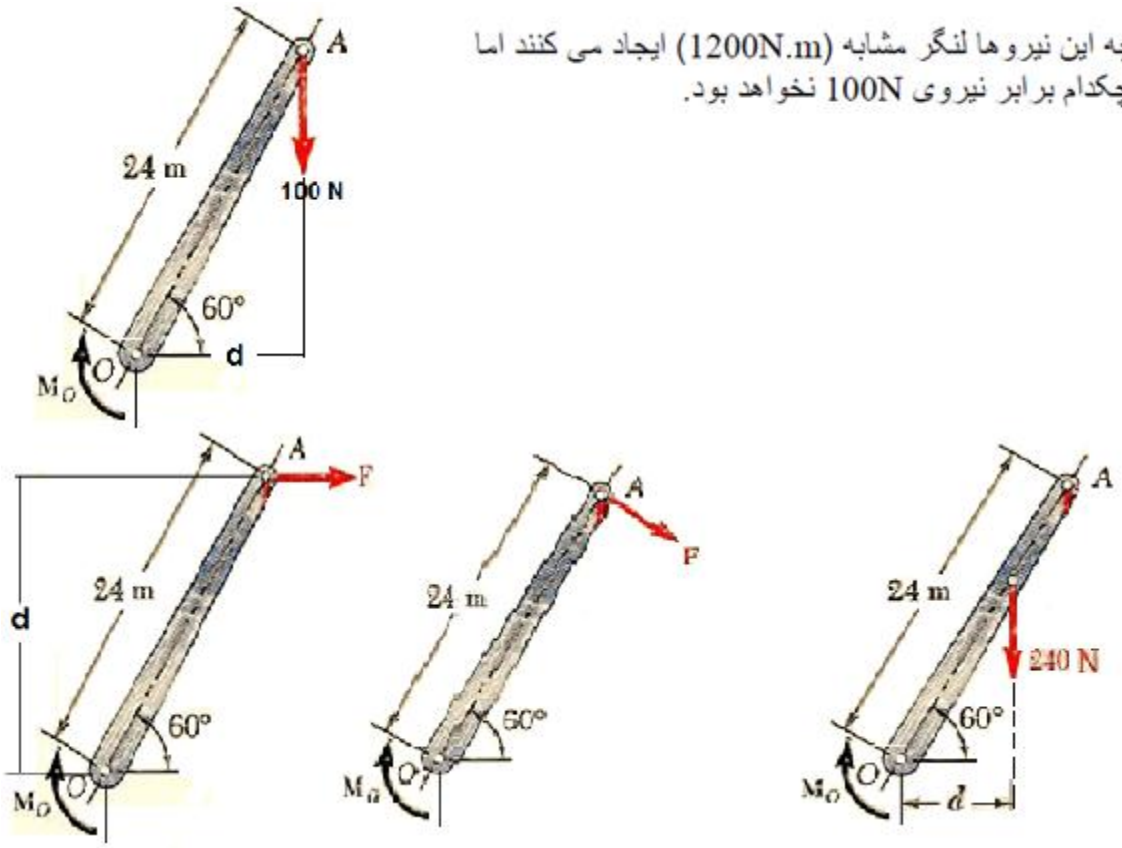
d) موقعیت نیروی 240N عمودی که لنگری مشابه بوجود می آورد:



$$M_O = Fd$$
$$1200\ \text{N}\cdot\text{m} = (240\ \text{N})d$$
$$d = \frac{1200\ \text{N}\cdot\text{m}}{240\ \text{N}} = 5\ \text{m}$$
$$OB\cos 60^\circ = 5\ \text{m}$$

$$OB = 10\ \text{m}$$

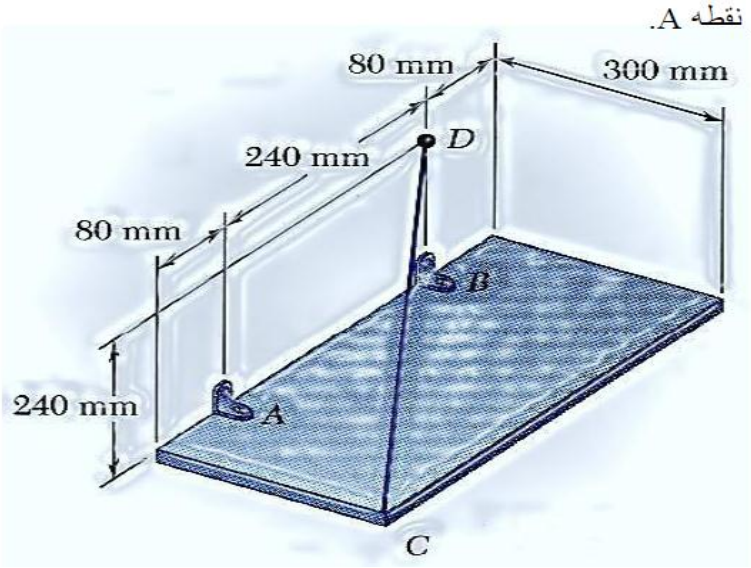
e) گرچه این نیروها لنگر مشابه (1200N.m) ایجاد می کنند اما هیچکدام برابر نیروی 100N نخواهد بود.



تمرین ۱: مثال ۱ را برای حالتی که زاویه ۳۰ درجه شود نیز مجدداً حل کرده و نتایج را مقایسه کنید.

مثال ۲

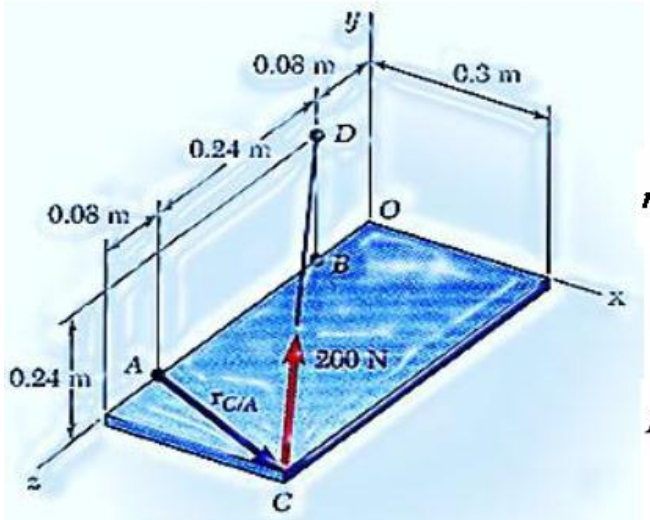
- صفحه مستطیلی توسط دو نبشی در نقاط A و B و سیم CD مهار شده است.اگر نیروی کششی در سیم 200N باشد ،مطلوبست لنگر در نقطه A.



مثال ۲

لنگردر A حاصل بردارنیرویی در C است که درفاصله ای که تا A دارد بصورت عمودی ضرب می شود.

$$M_A = r_{C/A} \times F$$



A (0, 0 ,0.32)
C (0.3 , 0 , 0.4)
D(0 , 0.24 , 0.08)

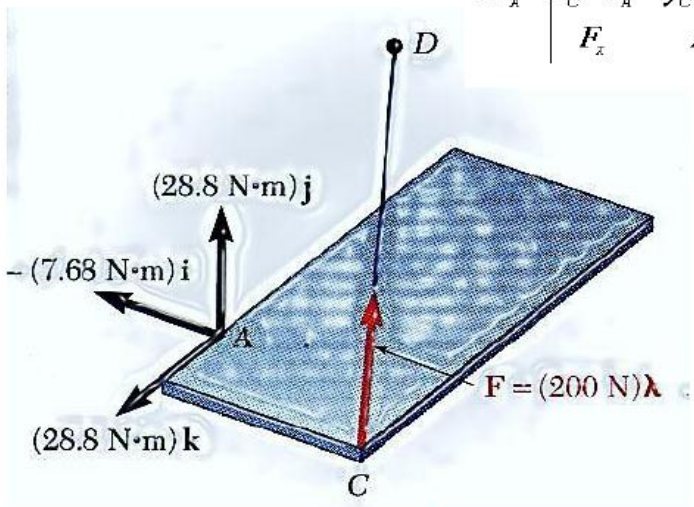
$$r_{C/A} = r_C - r_A = (0.3\text{ m})\vec{i} + (0.08\text{ m})\vec{k}$$

$$F = F\lambda = (200\text{ N})\frac{\overrightarrow{r_{C/D}}}{r_{C/D}}$$

$$= (200\text{ N})\frac{-(0.3\text{ m})i + (0.24\text{ m})j - (0.32\text{ m})k}{0.5\text{ m}}$$

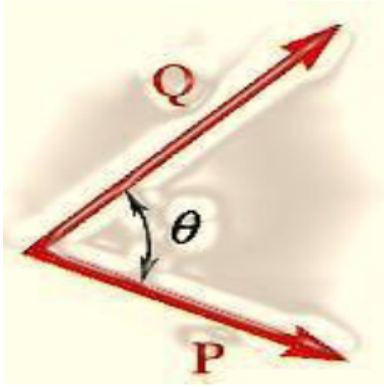
$$= -(120\text{ N})i + (96\text{ N})j - (128\text{ N})k$$

$$M_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$



$$M_A = -(7.68\text{N}\cdot\text{m})i + (28.8\text{N}\cdot\text{m})j + (28.8\text{N}\cdot\text{m})k$$

تمرین ۲: در مثال ۲ لنگر حول نقطه B را نیز حاسبه نمایید.



- ضرب داخلی(اسکالر) دو بردار P و Q بصورت زیر بیان می گردد:

$$\vec{P}\bullet\vec{Q}=PQ\cos\theta$$ حاصلضرب اسکالر

- حاصلضرب اسکالر:
  - جابجائی پذیر است: $\vec{P}\bullet\vec{Q}=\vec{Q}\bullet\vec{P}$
  - توزیع پذیر است: $\vec{P}\bullet(\vec{Q}_1+\vec{Q}_2)=\vec{P}\bullet\vec{Q}_1+\vec{P}\bullet\vec{Q}_2$
  - شرکت پذیر نیست: $(\vec{P}\bullet\vec{Q})\bullet\vec{S}=$ تعریف نشده

- حاصلضرب اسکالر با مولفه های واحد:

$$\vec{P}\bullet\vec{Q}=(P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k})\bullet(Q_x\vec{i}+Q_y\vec{j}+Q_z\vec{k})$$

$$\vec{i}\bullet\vec{i}=1\quad\vec{j}\bullet\vec{j}=1\quad\vec{k}\bullet\vec{k}=1\quad\vec{i}\bullet\vec{j}=0\quad\vec{j}\bullet\vec{k}=0\quad\vec{k}\bullet\vec{i}=0$$

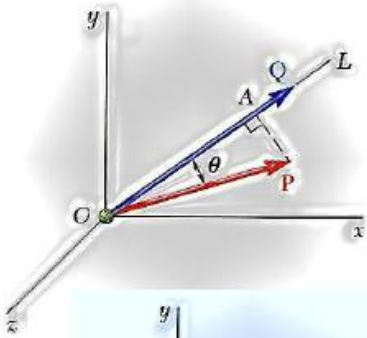
$$\vec{P}\bullet\vec{Q}=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z$$

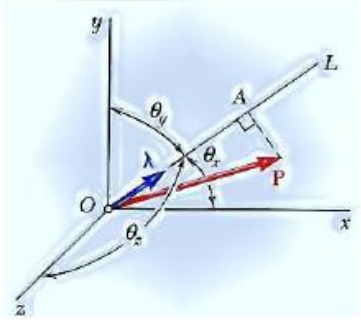
$$\vec{P}\bullet\vec{P}=P_x^2+P_y^2+P_z^2=P^2$$

- زاویه بین دو بردار: $\vec{P}\bullet\vec{Q}=PQ\cos\theta=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z$

$$\cos\theta=\frac{P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z}{PQ}$$

- تصویر یک بردار روی محور های معین





تصویر P روی OL $P_{OL}=P\cos\theta=$

$$\vec{P}\bullet\vec{Q}=PQ\cos\theta$$

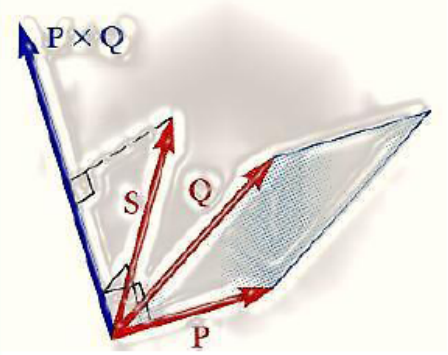
$$\frac{\vec{P}\bullet\vec{Q}}{Q}=P\cos\theta=P_{OL}$$

- برای یک محور می توان یک بردار واحد تعریف کرد:

$$P_{OL}=\vec{P}\bullet\vec{\lambda}$$
$$=P_x\cos\theta_x+P_y\cos\theta_y+P_z\cos\theta_z$$

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

حاصلضرب سه گانه سه بردار



- حاصلضرب سه گانه سه بردار

$$\vec{S}\bullet\left(\vec{P}\times\vec{Q}\right)=\text{نتیجه عددی}$$

- شش ترکیب ضرب سه گانه از PوSوQ بزرگی برابری دارد اما علامت یکسانی ندارند ,

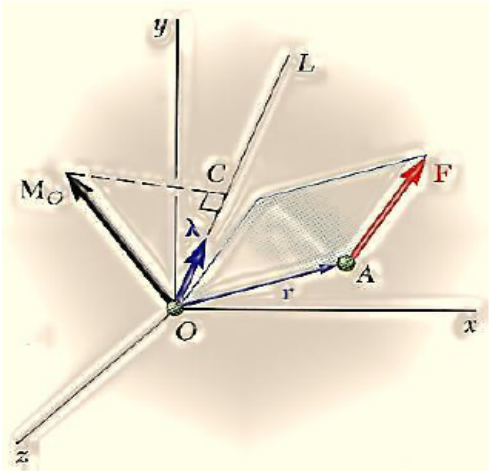
$$\vec{S}\bullet\left(\vec{P}\times\vec{Q}\right)=\vec{P}\bullet\left(\vec{Q}\times\vec{S}\right)=\vec{Q}\bullet\left(\vec{S}\times\vec{P}\right)$$
$$=-\vec{S}\bullet\left(\vec{Q}\times P\right)=-\vec{P}\bullet\left(\vec{S}\times\vec{Q}\right)=-\vec{Q}\bullet\left(\vec{P}\times\vec{S}\right)$$

$$\vec{S}\bullet\left(\vec{P}\times\vec{Q}\right)=S_x\left(P_yQ_z-P_zQ_y\right)+S_y\left(P_zQ_x-P_xQ_z\right)+S_z\left(P_xQ_y-P_yQ_x\right)$$

- با ارزیابی ضرب سه گانه:

$$=\begin{vmatrix}S_x & S_y & S_z\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}$$

گشتاور یک نیرو حول محوری معین



- گشتاور Mo که حاصل اثرکردن نیروی F در نقطه A است:

$$\vec{M}_O=\vec{r}\times\vec{F}$$

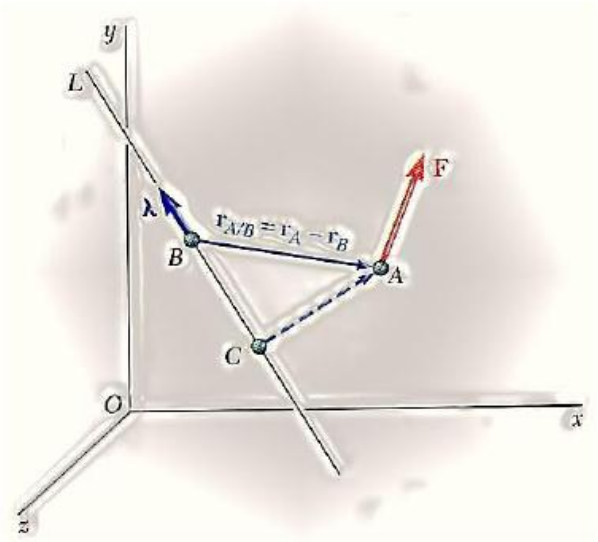
- گشتاور M_{OL} حول محور OL تصویر گشتاور Mo روی این محور است

$$M_{OL}=\vec{\lambda}\bullet\vec{M}_O=\vec{\lambda}\bullet\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)$$

- گشتاور نیروی F حول محورهای مختصات

$$M_x=yF_z-zF_y$$
$$M_y=zF_x-xF_z$$
$$M_z=xF_y-yF_x$$

گشتاور یک نیرو حول محوری معین



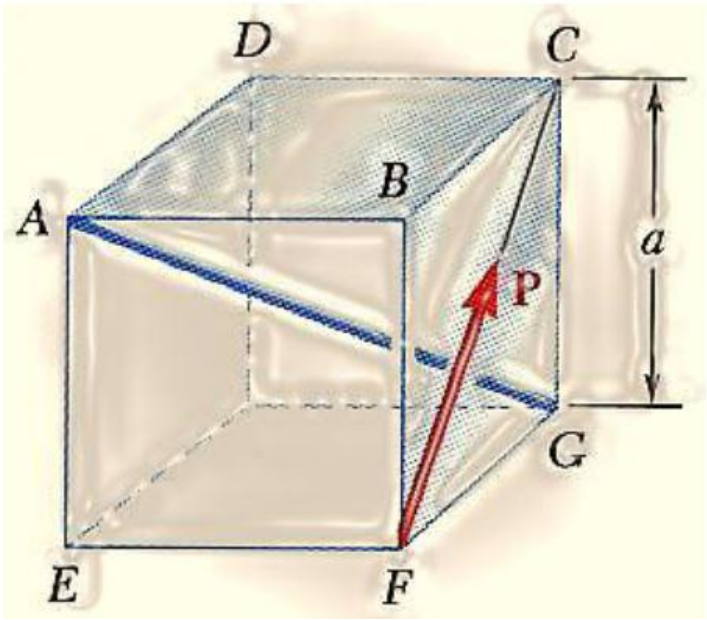
- گشتاور یک نیرو حول محوری اختیاری

$$M_{BL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_B$$
$$= \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r}_{A/B} \times \vec{F}\right)$$
$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

- گشتاور نسبت به یک محور،یک کمیت اسکالر است اگرچه این گشتاور به محور خاصی مربوط می شود که راستای مشخصی دارد.

مثال ۳

❑ مکعبی تحت اثر نیروی P قرار دارد.



مطلوبست:

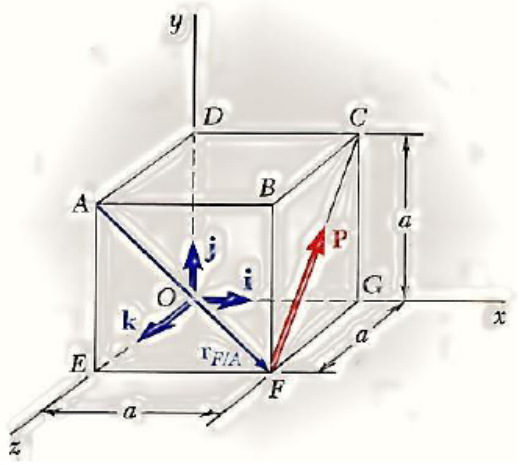
a) گشتاور حول A

b) گشتاور حول ضلع AB

c) گشتاور حول قطر AG

d) فاصله عمودی بین AGو FC

مثال ۳



✓ گشتاور حول A

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{F/A} \times \vec{P}$$

$$\vec{r}_{F/A} = a\vec{i} - a\vec{j} = a(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{P} = P\left(1/\sqrt{2}\,\vec{j} - 1/\sqrt{2}\,\vec{k}\right) = P/\sqrt{2}(\vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{M}_A = a(\vec{i} - \vec{j}) \times P/\sqrt{2}(\vec{j} - \vec{k})$$

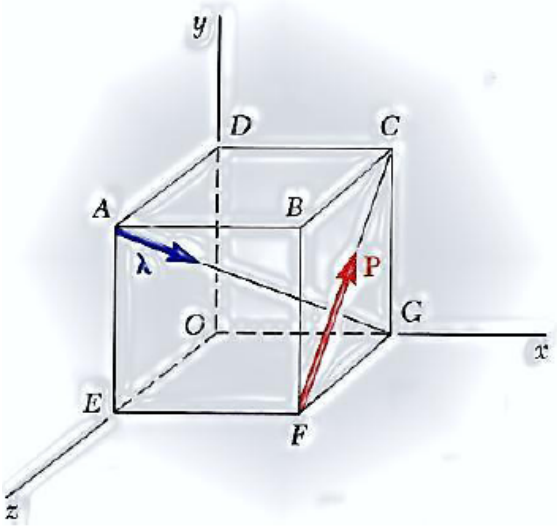
$$\boxed{\vec{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}$$

✓ گشتاور حول ضلع AB

$$\vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$
$$\vec{i} \bullet \vec{j} = 0$$
$$\vec{i} \bullet \vec{i} = 1$$

$$M_{AB} = \vec{i} \bullet \vec{M}_A$$
$$= \vec{i} \bullet (aP/\sqrt{2})(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\boxed{M_{AB} = aP/\sqrt{2}}$$



✓ گشتاور حول قطر AG

$$M_{AG} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_A$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{A/G}}{r_{A/G}} = \frac{a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

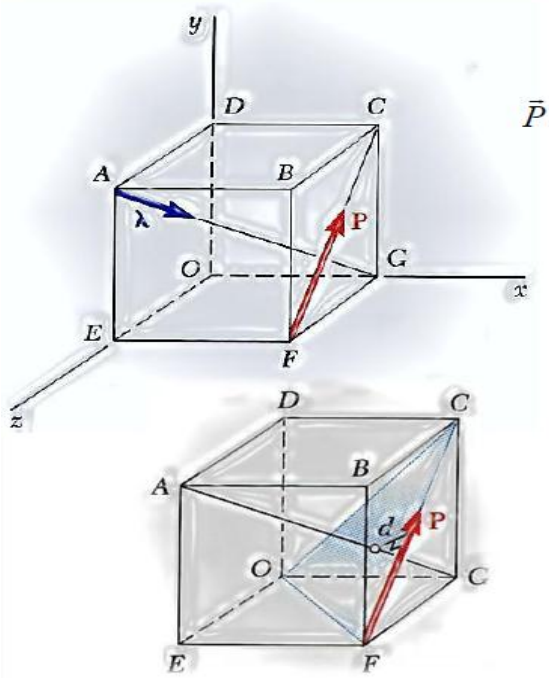
$$\vec{M}_A = \frac{aP}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$M_{AG} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \bullet \frac{aP}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$= \frac{aP}{\sqrt{6}}(1 - 1 - 1)$$

$$\boxed{M_{AG} = -\frac{aP}{\sqrt{6}}}$$

مثال ۳



✓ فاصله عمودی بین AG و FC

$$\vec{P}\bullet\vec{\lambda}=\frac{P}{\sqrt{2}}\left(\vec{j}-\vec{k}\right)\bullet\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\right)=\frac{P}{\sqrt{6}}(0-1+1)$$
$$=0$$

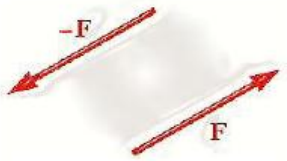
دراینجا P ,عمود است با AG

$$|M_{AG}|=\frac{aP}{\sqrt{6}}=Pd$$

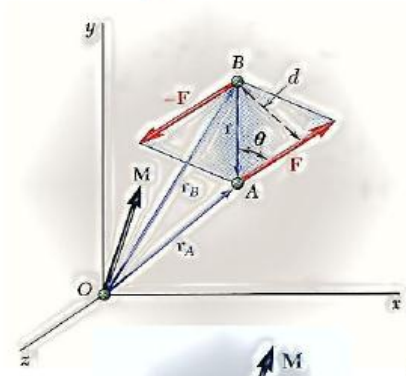
$$d=\frac{a}{\sqrt{6}}$$

تمرین ۳: در مثال ۳ مطلوبست محاسبه گشتاور حول نقاط C، F، D و حول محور AD.

گشتاوریک کوپل

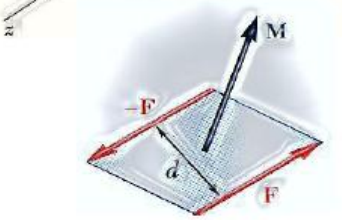


- دو نیروی موازی F و F- دارای بزرگی یکسان ولی جهت های مخالفند.به این حالت یک کوپل نیرویی گویند.



- گشتاور کوپل

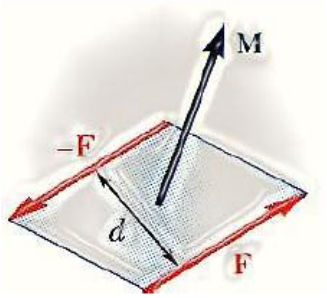
$$\vec{M}=\vec{r}_A\times\vec{F}+\vec{r}_B\times\left(-\vec{F}\right)$$
$$=\left(\vec{r}_A-\vec{r}_B\right)\times\vec{F}$$
$$=\vec{r}\times\vec{F}$$
$$M=rF\sin\theta=Fd$$



- بردار گشتاور یک کوپل بستگی به انتخاب مبدا مختصات خواهد داشت.گشتاور جفت یک بردار آزاد است : یعنی می توان این بردار را بدون تغییر مقصود در فضا حرکت داد به شرطی که جهت و مقدارش تغییر نکند.

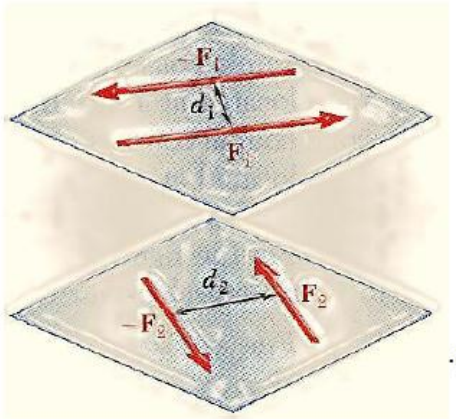
مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

گشتاور یک کوپل



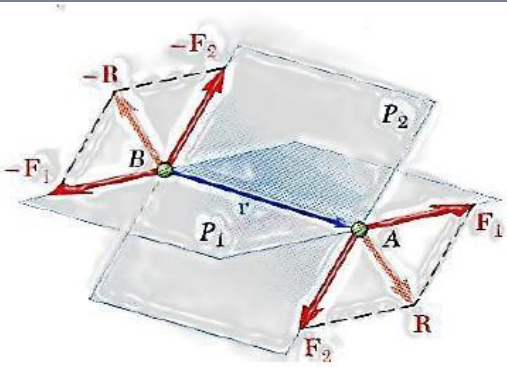
- دو گشتاور کوپل یکسان هستند اگر:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$



- دو کوپل دارای موقعیت موازی در صفحه:
- دو کوپل تمایل به چرخش حول یک نقطه دارند.
- طبق قرارداد چرخشهای ساعتگرد را مثبت در نظر می گیریم.

جمع کوپلها



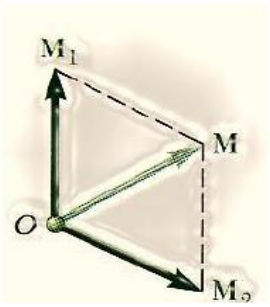
- دوصفحه متقاطع P_1و P_2 را که هرکدام شامل دوکوپل نیرو است درنظر بگیرید:

$\bar{M}_1 = \bar{r} \times \bar{F}_1$ درصفحهٔ P_1

$\bar{M}_2 = \bar{r} \times \bar{F}_2$ درصفحهٔ P_2

- برآیند بردار های F نیز یک کوپل را تشکیل می دهند.

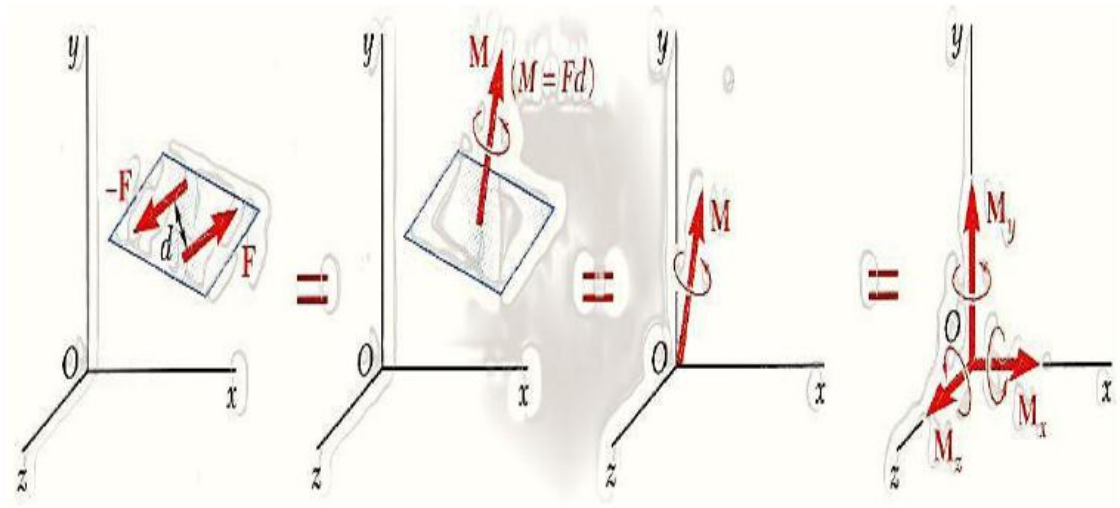
$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{R} = \bar{r} \times \left(\bar{F}_1 + \bar{F}_2\right)$$

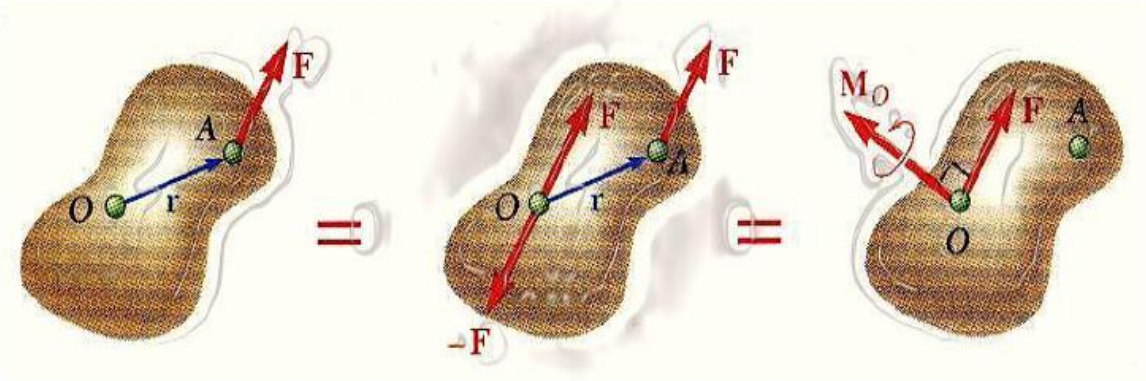


- از تئوری Varigon خواهیم داشت:

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}_1 + \bar{r} \times \bar{F}_2$$
$$= \bar{M}_1 + \bar{M}_2$$

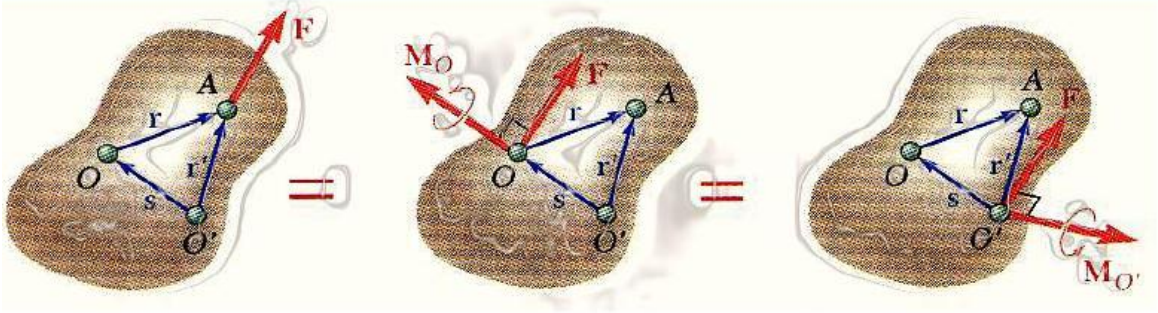
- درواقع منظور از جمع و تفریق کوپل ها، جمع و تفریق گشتاور های جفتهاست.





- با دقت در شکل فوق بوضوح می توان اثر یک نیرو(F) را در نقطه دلخواه دیگری مثل O دید.این تاثیر شامل یک گشتاور و یک نیروی معادل با F خواهد بود.

نمایش کوپل با بردار



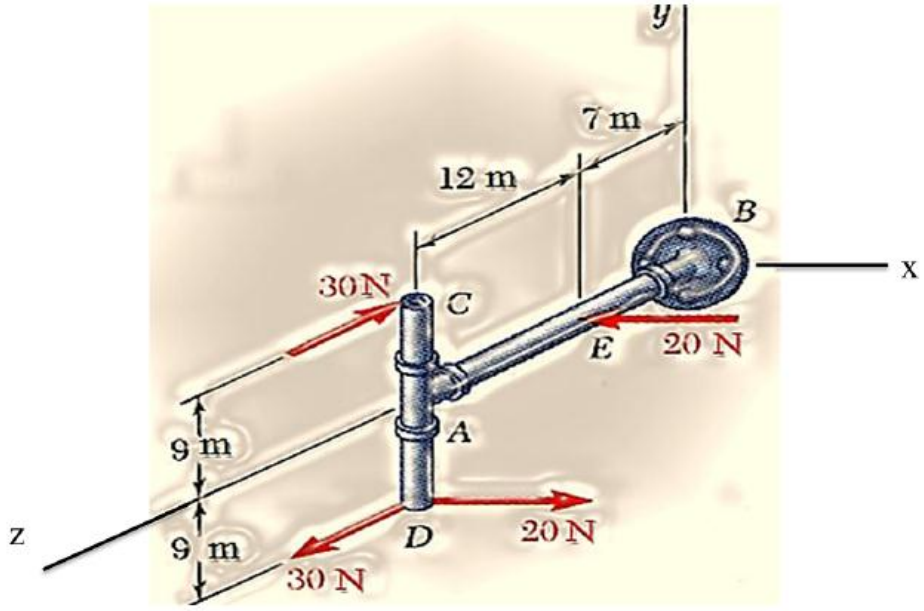
- نیروی F در A دارای دو اثر متفاوت در نقاط Oو ´O است.

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F}$$

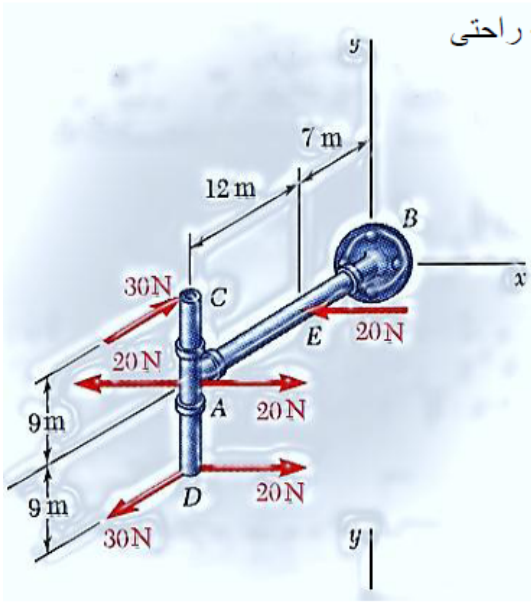
$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{s}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{s} \times \vec{F}$$
$$= \vec{M}_O + \vec{s} \times \vec{F}$$

مثال ۴

❑ مولفه معادل کوپل را برای جفت نیروهای نشان داده شده در شکل بیابید.



مثال ۴

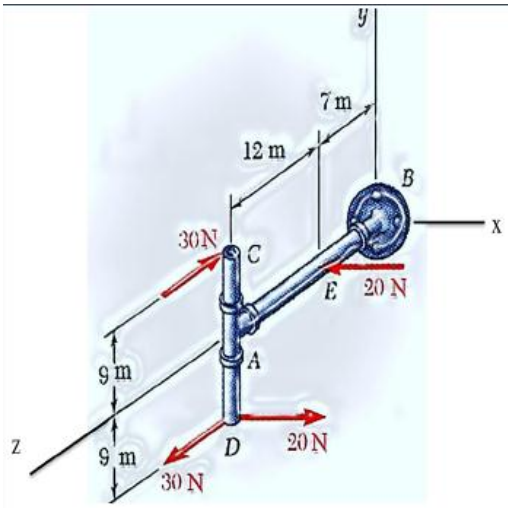


✓ با قرار دادن نیروی $\pm 20\text{N}$ در نقطه A می توان به راحتی سه زوج نیرویی تشکیل داد.

✓ بدین ترتیب بردار کوپل خواهد شد:

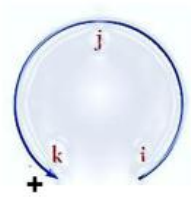
$$M_x = -(30\,\text{N})(18\ \text{m}) = -540\ \text{N.m}$$
$$M_y = +(20\,\text{N})(12\ \text{m}) = +240\ \text{N.m}$$
$$M_z = +(20\,\text{N})(9\ \text{m}) = +180\ \text{N.m}$$

$$\vec{M} = -(540\ \text{N.m})\vec{i} + (240\ \text{N.m})\vec{j} + (180\ \text{N.m})\vec{k}$$



✓ با انتخاب یک نقطه دلخواه می توان کوپل معادل این جفتها را در هر نقطه ای محاسبه کرد ، مثلا در D نیروهای اعمالی در C و E تولید گشتاور می کنند.

$$\vec{M} = \vec{M}_D = (18\ \text{m})\vec{j} \times (-30\,\text{N})\vec{k} + \left[(9\ \text{m})\vec{j} - (12\ \text{m})\vec{k}\right] \times (-20\,\text{N})\vec{i}$$

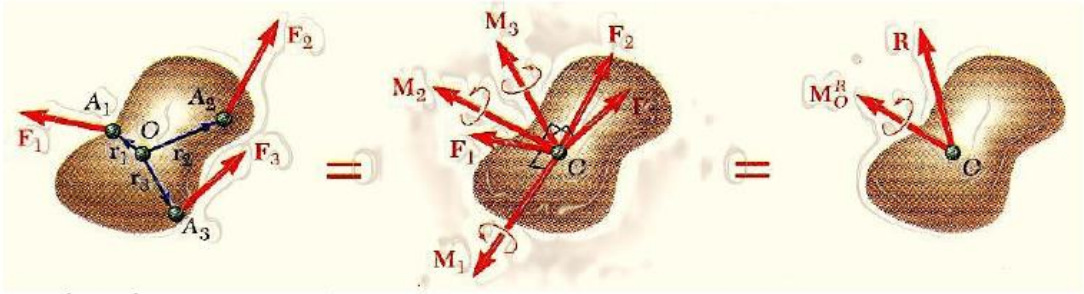


$$\vec{M} = -(540\ \text{N.m})\vec{i} + (240\ \text{N.m})\vec{j} + (180\ \text{N.m})\vec{k}$$

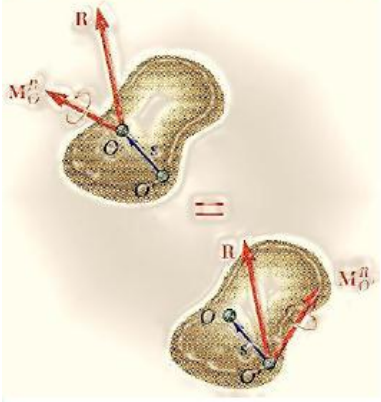
تمرین ٤: در مثال ٤ طول میله CE و CD را به گونه‌ای بیابید که لنگر در جهت y برابر 300 N.m و در جهت x نیز برابر 300 N.m گردد.

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

سیستم نیروها: ساده سازی نیروها و کوپلها



- یک سیستم از نیروها ممکن است با یک مجموعه از سیستمهای نیرو-کوپل در نقطه O جایگزین گردد.



- بردارهای نیرو و کوپل ممکن است با هم ترکیب شده و یک بردار برآیند نیرو یا کوپل تشکیل دهند.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \qquad \vec{M}_O^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

- سیستم نیرو-کوپل ممکن است به نقطه ای دیگر جابجا شود وبا ممان جدید ترکیب گردد.

$$\vec{M}_{O'}^R = \vec{M}_O^R + \vec{s} \times \vec{R}$$

- دودستگاه نیرو وقتی باهم برابرند که بتوان آنها را به سیستم نیرو-کوپل مشابه ویکسانی ساده سازی کرد.

مثال ۵

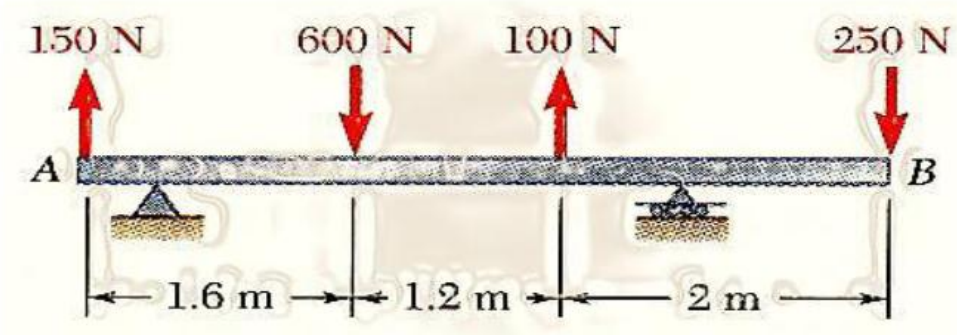
❑ برای تیرنشان داده شده مطلوبست ساده سازی سیستم نیروی در:

a. نقطه A

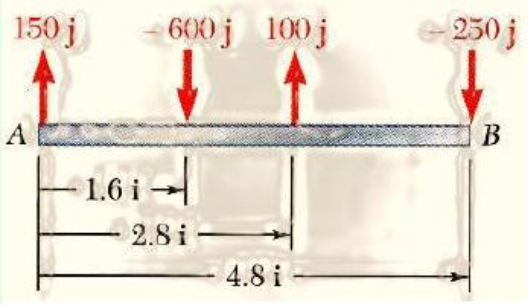
b. درنقطه B

c. تعیین بردار برآیند نیروی کلی

لازم نیست واکنشهای تکیه گاهی را در محاسبات دخالت دهید.



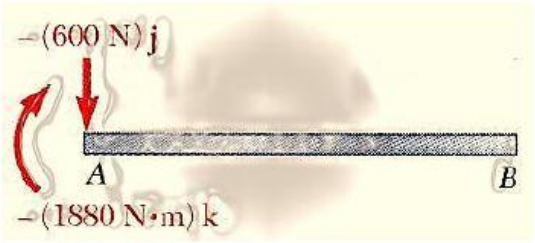
مثال ۵



a) محاسبه برآیند در نقطه A

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$
$$= (150\ \text{N})\vec{j} - (600\ \text{N})\vec{j} + (100\ \text{N})\vec{j} - (250\ \text{N})\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{R} = -(600\ \text{N})\vec{j}}$$



$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$
$$= (1.6\vec{i}) \times (-600\vec{j}) + (2.8\vec{i}) \times (100\vec{j})$$
$$+ (4.8\vec{i}) \times (-250\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{M}_A^R = -(1880\ \text{N} \cdot \text{m})\vec{k}}$$

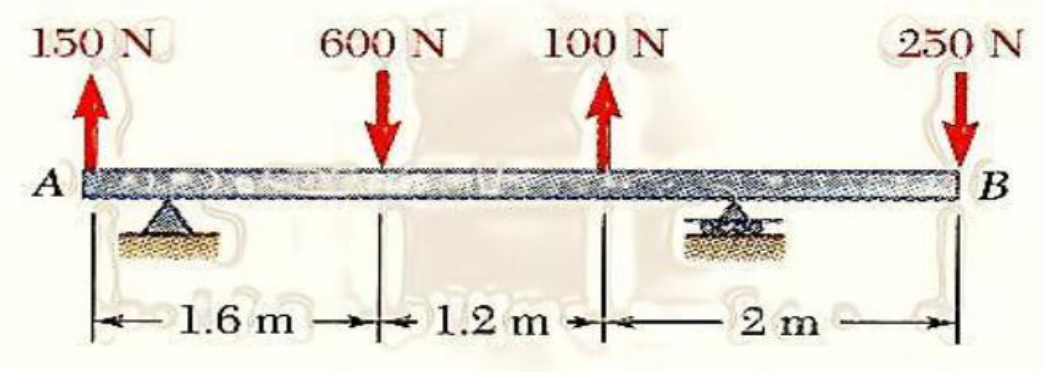
❑ برای تیرنشان داده شده مطلوبست ساده سازی سیستم نیروی در :

a. نقطه A

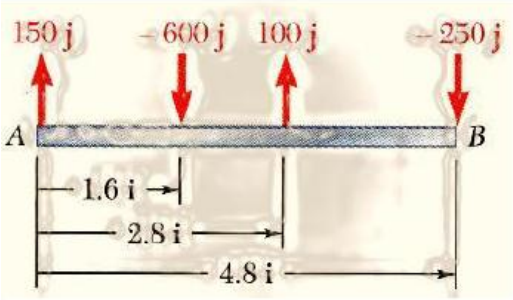
b. درنقطه B

c. تعیین بردار برآیند نیروی کلی

لازم نیست واکنشهای تکیه گاهی را در محاسبات دخالت دهید.

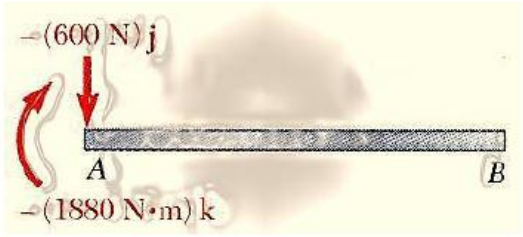


مثال ۵

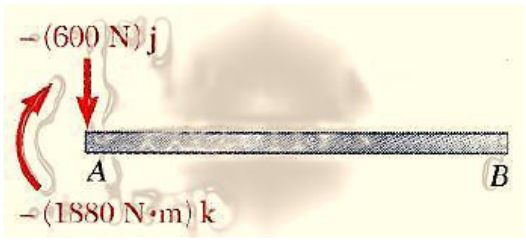


a) محاسبه برآیند در نقطه A

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$
$$= (150\ \text{N})\vec{j} - (600\ \text{N})\vec{j} + (100\ \text{N})\vec{j} - (250\ \text{N})\vec{j}$$
$$\boxed{\vec{R} = -(600\ \text{N})\vec{j}}$$



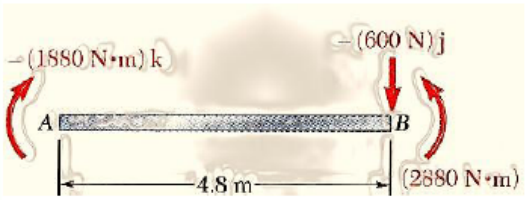
$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$
$$= (1.6\vec{i}) \times (-600\vec{j}) + (2.8\vec{i}) \times (100\vec{j})$$
$$+ (4.8\vec{i}) \times (-250\vec{j})$$
$$\boxed{\vec{M}_A^R = -(1880\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k}}$$



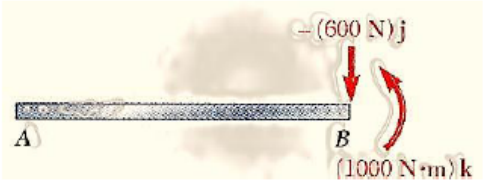
b) محاسبه برآیند در نقطه B

$$\boxed{\vec{R} = -(600\ \text{N})\vec{j}}$$

می توان بصورت مستقیم و یا با ممان و نیروی موجود در نقطه A برآیندها رادر B بدست آورد.



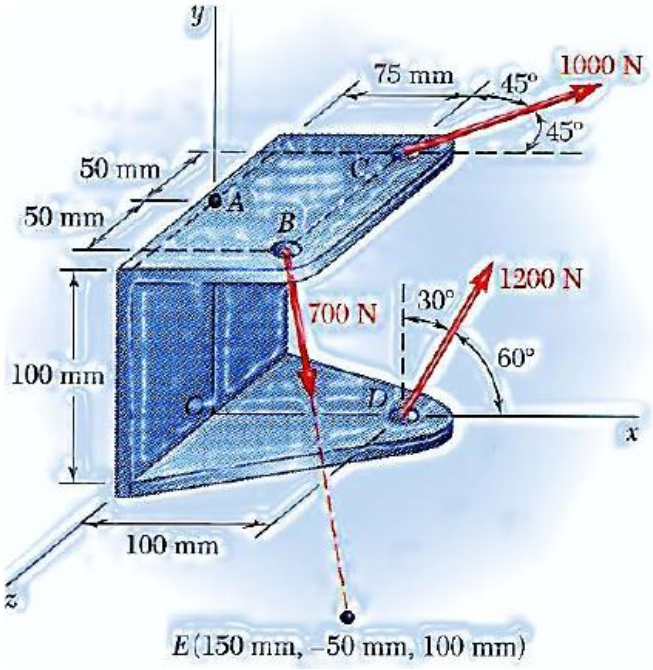
$$\vec{M}_B^R = \vec{M}_A^R + \vec{r}_{B/A} \times \vec{R}$$
$$= -(1880\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k} + (-4.8\ \text{m})\vec{i} \times (-600\ \text{N})\vec{j}$$
$$= -(1880\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k} + (2880\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k}$$
$$\boxed{\vec{M}_B^R = +(1000\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k}}$$



تمرین ۵: در مثال ۵ مطلوبست ساده سازی سیستم نیروها در وسط تیر.

مثال ۶

❑ سه کابل به سگدستی مطابق شکل متصل شده اند:مطلوبست سیستم برآیند نیرو-کوپل در نقطه A.

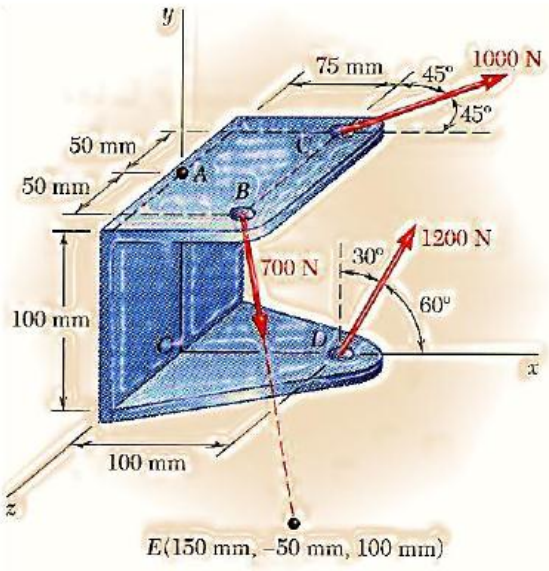


✓ ابتدا فواصل عمود تا نقطه مورد نظر را تعیین می کنیم

$$\vec{r}_{B/A} = 0.075\,\vec{i} + 0.050\vec{k}\ (\text{m})$$

$$\vec{r}_{C/A} = 0.075\,\vec{i} - 0.050\vec{k}\ (\text{m})$$

$$\vec{r}_{D/A} = 0.100\,\vec{i} - 0.100\,\vec{j}\ (\text{m})$$



✓ مشخصات بردارنیروی F_B باتوجه به کسینوسهای هادی:

E(150 , -50 , 100)
B(75 , 100 , 50)
E/B(75 , -150 , 50)

$$\vec{F}_B = (700\ \text{N})\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{E/B}}{r_{E/B}} = \frac{75\vec{i} - 150\,\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$= 0.429\,\vec{i} - 0.857\,\vec{j} + 0.289\vec{k}$$

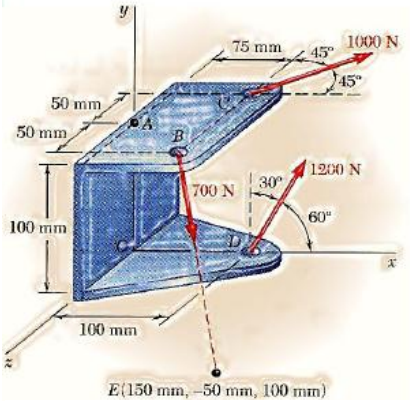
$$\vec{F}_B = 300\,\vec{i} - 600\,\vec{j} + 200\vec{k}\ \ (\text{N})$$

مثال ۶

✓ مشخصات بردارنیروی F_C و F_D باتوجه به زوایا :

$$\vec{F}_D = (1200\ \text{N})(\cos 60\,\vec{i} + \cos 30\,\vec{j}) = 600\,\vec{i} + 1039\,\vec{j}\ \ (\text{N})$$

$$\vec{F}_C = (1000\ \text{N})(\cos 45\,\vec{i} - \cos 45\,\vec{j}) = 707\,\vec{i} - 707\,\vec{j}\ \ (\text{N})$$

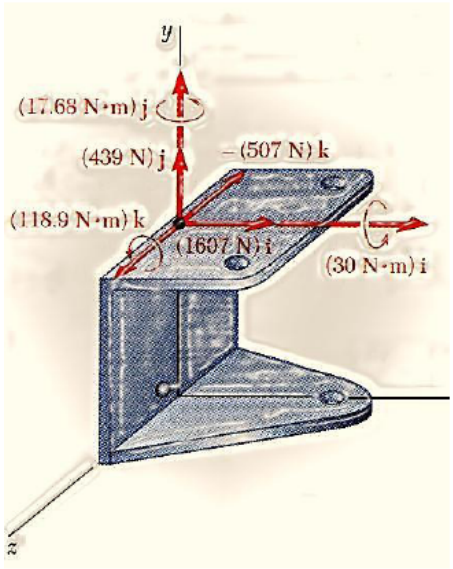


✓ برآیند نیرویی برابر است با:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = (300 + 707 + 600)\vec{i} + (-600 + 1039)\vec{j} + (200 - 707)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1607\,\vec{i} + 439\,\vec{j} - 507\,\vec{k}\ \ (\text{N})}$$

✓ برآیند کوپل برابر است با:



$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\,\vec{i} - 45\,\vec{k}$$

$$\vec{r}_{C/A} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_{D/A} \times \vec{F}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\,\vec{k}$$

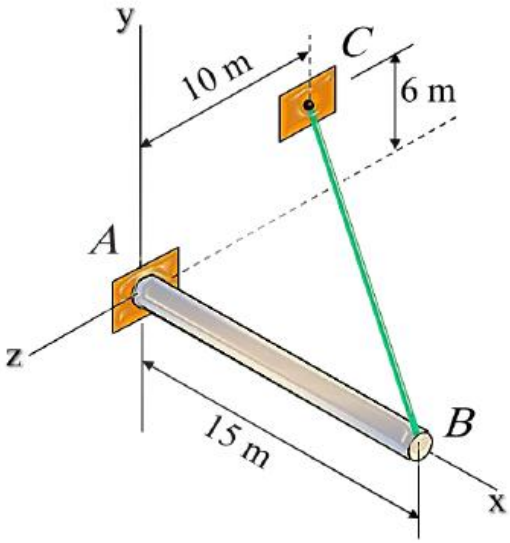
$$\boxed{\vec{M}_A^R = 30\,\vec{i} + 17.68\,\vec{j} + 118.9\,\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1607\,\vec{i} + 439\,\vec{j} - 507\,\vec{k}\ \ (\text{N})}$$

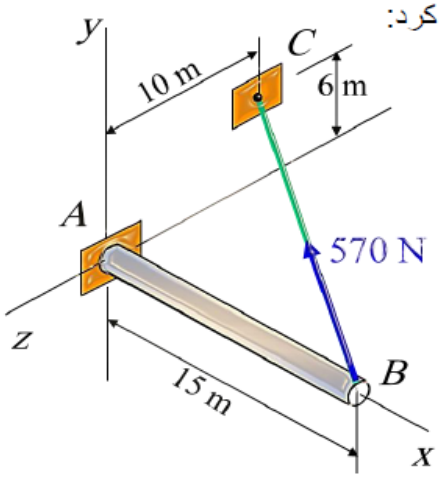
تمرین ٦: در مثال ٦ مطلوبست محاسبه سیستم برآیند نیرو در نقاط O، B، C و D.

مثال ۷

❑ تیر AB در انتها به دیوار کاملا مقید شده است.انتهای B توسط کابلی به دیوار در مختصات داده شده وصل شده است.اگر کشش موجود در کابل 570N اندازه گیری شده باشد مطلوبست ممان در A.



✓ ابتدا بردار نیرو را باید براساس مولفه ها و کسینوسهای هادی آن تعریف کرد:



$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\,\frac{(d_x\,\mathbf{i} + d_y\,\mathbf{j} + d_z\,\mathbf{k})}{d_{BC}}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-15)^2 + (6)^2 + (-10)^2} = 19\ \text{m}$$

$$\mathbf{F} = 570\ \text{N}\ \frac{(-15\,\text{m}\ \mathbf{i} + 6\,\text{m}\ \mathbf{j} - 10\,\text{m}\,\mathbf{k})}{19\,\text{m}} =$$

$$\mathbf{F} = -(450\ \text{N})\ \mathbf{i} + (180\ \text{N})\ \mathbf{j} - (300\ \text{N})\,\mathbf{k}$$

✓ در ادامه ممان را محاسبه می کنیم:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{r}_{B/A} = (15\ \text{m})\ \mathbf{i}$$

$$\mathbf{M}_A = 15\ \mathbf{i} \times (-450\ \mathbf{i} + 180\ \mathbf{j} - 300\ \mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_A = (4500\ \text{N·m})\ \mathbf{j} + (2700\ \text{N·m})\ \mathbf{k}$$

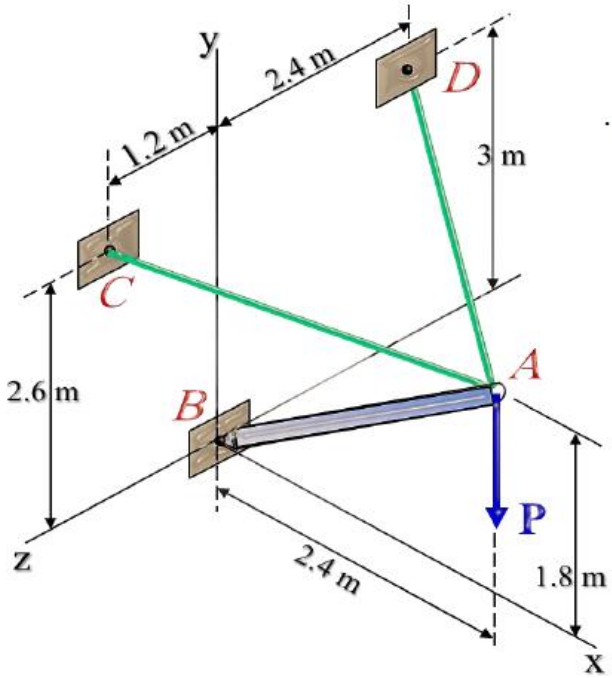
تمرین ۷: در مثال ۷ اگر لنگر قابل تحمل در تکیه گاه A برابر 3000N.m j + 2000N.m k باشد طول AB را محاسبه کنید.

مثال ۸

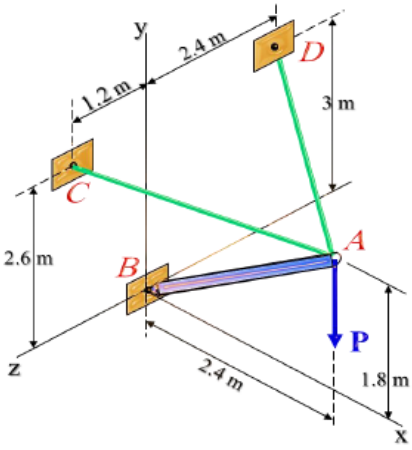
❑ می دانیم که کشش موجود در کابل AC برابر 1260N است،مطلوبست تعیین:

a) زاویه بین کابل AC و تیر.

b) تصویر نیروی کابل مورد نظر روی تیر.



✓ محاسبه زاویه شکل گرفته بین دو بردار:



$$\overrightarrow{AC} = -(2.4\text{ m})\,\mathbf{i} + (0.8\text{ m})\,\mathbf{j} + (1.2\text{ m})\,\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = -(2.4\text{ m})\,\mathbf{i} - (1.8\text{ m})\,\mathbf{j}$$

$$AC = \sqrt{(-2.4)^2 + (0.8)^2 + (1.2)^2} = 2.8\text{ m}$$

$$AB = \sqrt{(-2.4)^2 + (-1.8)^2 + (0)^2} = 3.0\text{ m}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (AC)(AB)\cos\theta$$

$$(-2.4\,\mathbf{i} + 0.8\,\mathbf{j} + 1.2\,\mathbf{k}) \cdot (-2.4\,\mathbf{i} - 1.8\,\mathbf{j}) = (2.8)(3.0)\cos\theta$$

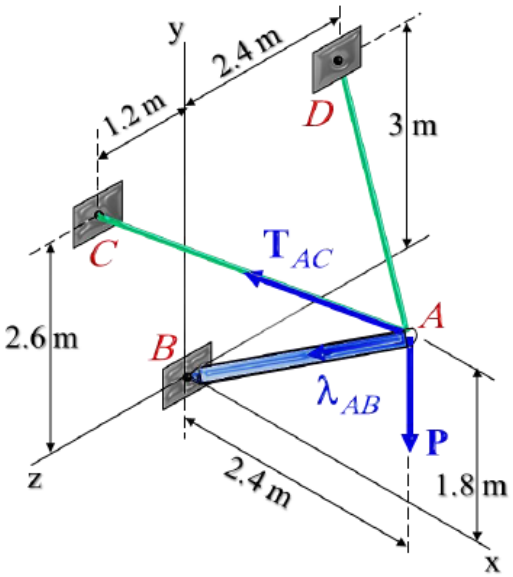
$$(-2.4)(-2.4) + (0.8)(-1.8) + (1.2)(0) = 8.4\cos\theta$$

$$\cos\theta = 0.51429$$

$$\theta = 59.1^\circ$$

مثال ۸

✓ تصویر نیروی موجود در کابل AC نظر روی تیر AB:



$$(T_{AC})_{AB} = T_{AC} \cdot \lambda_{AB}$$

$$= T_{AC} \cos\theta$$

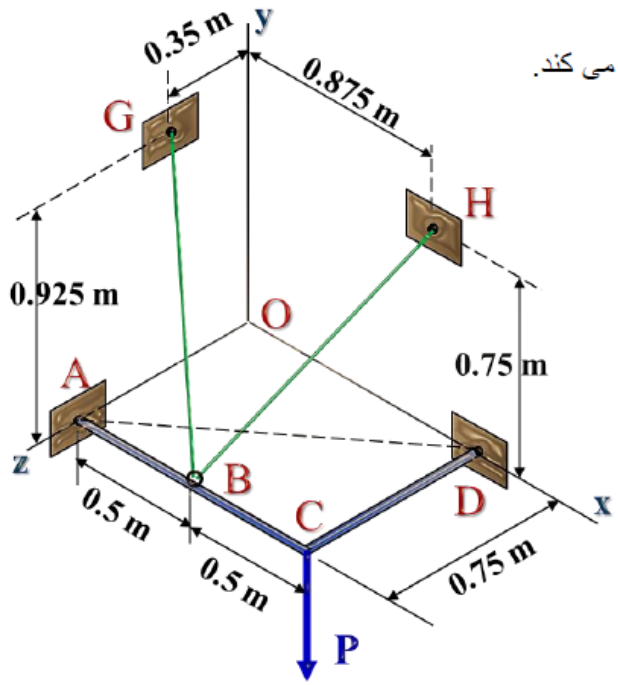
$$\cos\theta = 0.51429$$

$$= (1260\ \text{N})\ (0.51429)$$

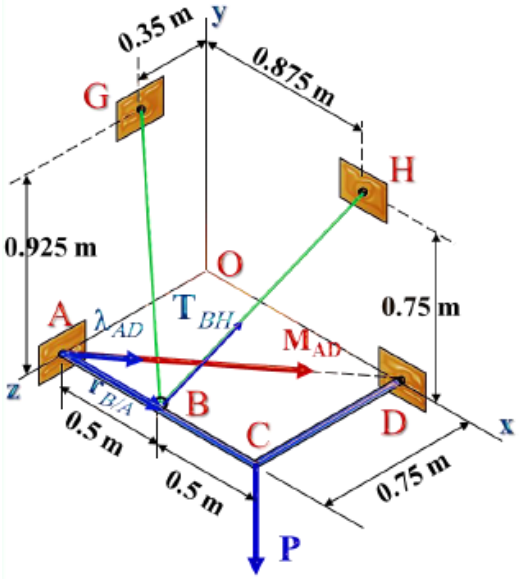
$$(T_{AC})_{AB} = 648\ \text{N}$$

❑ قاب ACD توسط کابلی حمایت می شود که با یک حلقه به قاب متصل شده است.نیروی کششی کابل 450N است.مطلوبست تعیین :

لنگری که نیروی کابل BH حول قطر AD اعمال می کند.



مثال ۹



✓ لنگر حول قطر قاب :

$$M_{OL} = \lambda \cdot M_O = \lambda \cdot (r \times F)$$

$$M_{AD} = \lambda_{AD} \cdot (r_{B/A} \times T_{BH})$$

$$\lambda_{AD} = \frac{1}{5} (4\,i - 3\,k)$$

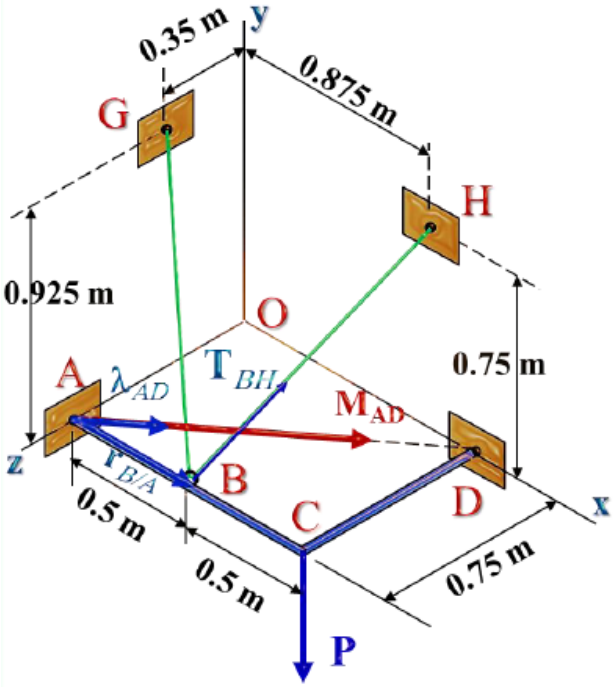
B(0.5 ,0, 0.75)
A(0 ,0, 0.75)

$$r_{B/A} = (0.5\ m)\ i$$

$$d_{BH} = \sqrt{(0.375)^2 + (0.75)^2 + (-0.75)^2} = 1.125\ m$$

$$T_{BH} = \frac{450\ N}{1.125} (0.375\,i + 0.75\,j - 0.75\,k)$$

$$= (150\ N)\,i + (300\ N)\,j - (300\ N)\,k$$



✓ درنهایت:

$$M_{AD} = \lambda_{AD} \cdot (r_{B/A} \times T_{BH})$$

$$M_{AD} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 150 & 300 & -300 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} [(-3)(0.5)(300)]$$

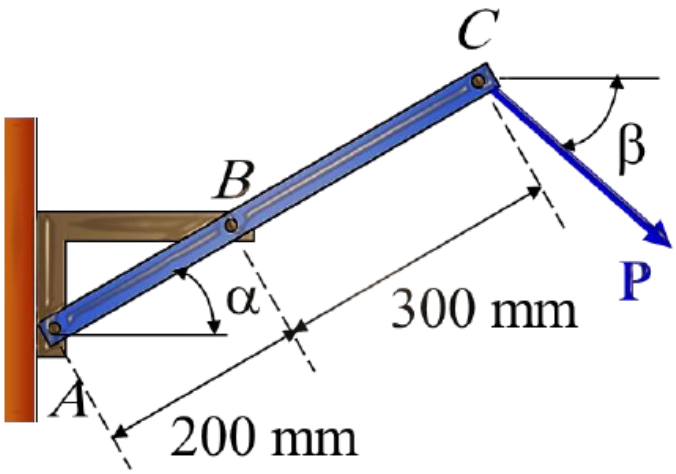
$$M_{AD} = -90\ N \cdot m$$

مثال ۱۰

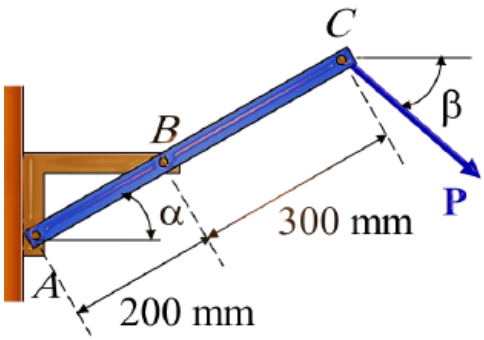
❑ نیروی P به بزرگی 250N به انتهای میله AC بطول 0.5m که توسط گیره ای درنقاط A و B به تکیه گاه مهار شده است وارد می شود.اگر β=60 و α=30 درجه باشد مطلوبست:

a) کوپل معادل نیروی P در نقطه B.

b) سیستم دو نیرویی معادل با P.



✓ کوپل معادل نیروی P در نقطه B.

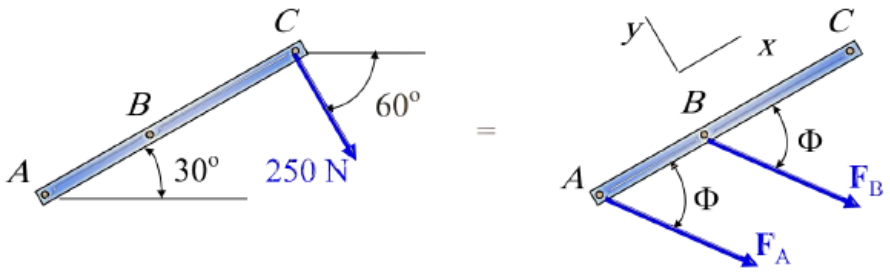


$F = 250\ N$ 60^{o}یاΣF : $F = P$

ΣM_B : $M = -(0.3\ m)(250\ N) = -75\ N$

$F = 250\ N$ 60^{o}, $M = 75\ N \cdot m$

✓ سیستم نیرویی معادل با P.



$F_A + F_B = P = 250$

مثال ۱۰

ΣF_y : $-250 = -F_A \sin\Phi - F_B \sin\Phi$

اگر $F_A = -F_B$ آنگاه $-250 = 0$

متعاقبا $\cos\Phi = 0$ یا $\Phi = 90^\circ$

ΣF_x : $0 = F_A \cos\Phi + F_B \cos\Phi$

$F_A = -F_B$ یا $\cos\Phi = 0$

باید: $F_A + F_B = 250$

ΣM_B : $-(0.3\text{ m})(250\text{ N}) = (0.2\text{ m})F_A$ (+)

$F_A = -375$ N

$F_B = +625$ N و

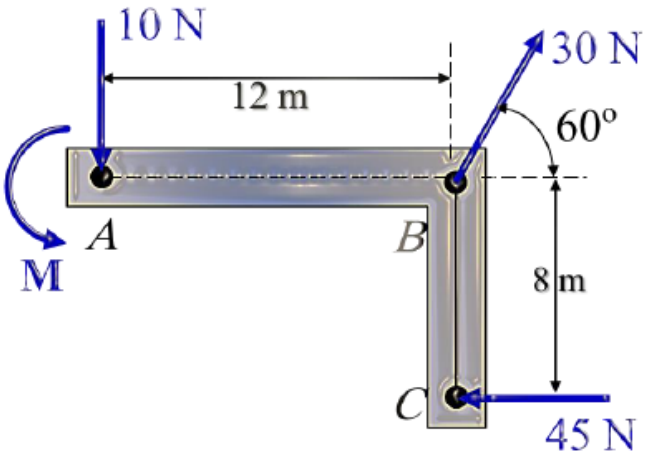
همچنین:

$F_A = 375$ N 60°, $F_B = 625$ N 60°

❑ یک لنگر به بزرگی 54N.m و سه نیرو مطابق شکل به یک نبشی قلاب وارد می شوند،مطلوبست:

a) برآیند این سیستم نیرویی.

b) محل برآیند یا امتداد آن روی دو ضلع.

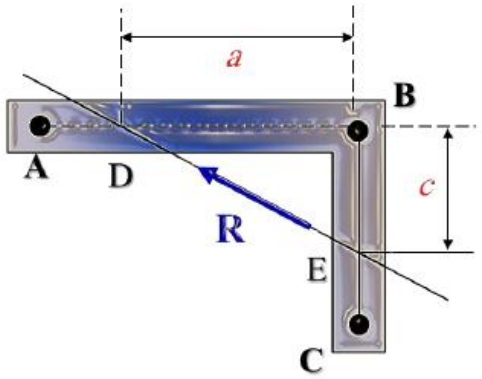


✓ برای تعیین برآیند این سیستم نیرویی باید مولفه های نیرویی را بدست آوریم:

$$\Sigma \mathbf{F}: \quad \mathbf{R} = (-10\,\mathbf{j}) + (-45\,\mathbf{i}) + (30\cos 60^\circ\,\mathbf{i} + 30\sin 60^\circ\,\mathbf{j})$$

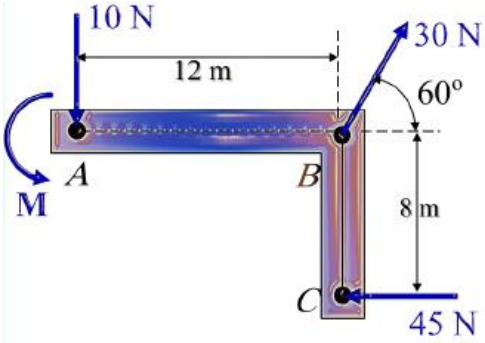
$$= -(30\text{ N})\,\mathbf{i} + (15.98\text{ N})\,\mathbf{j}$$

$$R = 34\text{ N} \qquad 28^\circ$$



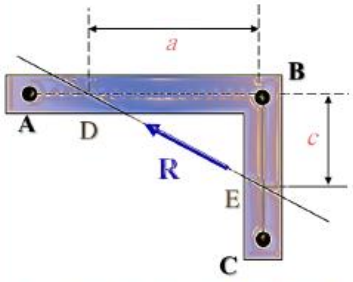
✓ تعیین فواصل a و c (مولفه های R)

ابتدا لنگر را B حساب می کنیم.



$$\Sigma M_B: \quad M_B = (54\text{ N·m}) + (12\text{ m})(10\text{ N}) - (8\text{ m})(45\text{ N})$$

$$= -186\text{ N·m}$$



$$\Sigma M_B: \quad -186\text{ N·m} = -a\,(15.98\text{ N}) \qquad a = 11.64\text{ m}$$

$$\Sigma M_B: \quad -186\text{ N·m} = c\,(30\text{ N}) \qquad c = 6.20\text{ m}$$

$$\mathbf{R} = -(30\text{ N})\,\mathbf{i} + (15.98\text{ N})\,\mathbf{j}$$