PDF Compressor Free Version

دانشگاه فنی و حرفه ای

جزوه استاتیک

آقای مهندس جمالی

دانشکده فنی و حرفه ای پسران بروجرد

تهیه و تنظیم جزوه: رضا آژن

PDF Compressor Free Version

فصل اول

Date: / /

Subject:

استاتیک

علم مکانیک : اجسامات . اجسام صلب : اجسامی که در اثر اعمال نیرو و ... تغییر شکل نمی‌دهند

فصل ۱: تعادل اجسام صلب (۲ بعدی) صفحه $\Sigma F_x=0 \quad \Sigma F_y=0 \quad \Sigma M=0$

فضا (۳ بعدی)

$\Sigma F_x=0 \quad \Sigma M_x=0$

$\Sigma F_y=0 \quad \Sigma M_y=0$

$\Sigma F_z=0 \quad \Sigma M_z=0$

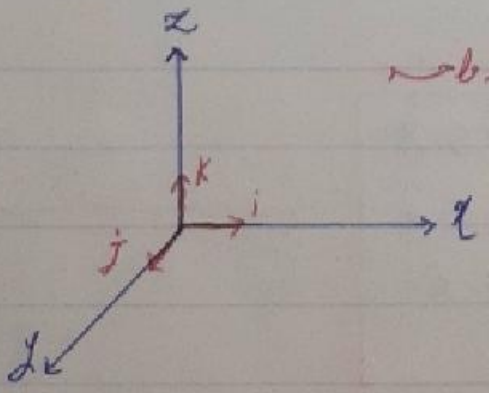
۲) بردار: پاره خطی است که سه ویژگی دارد. مقدار جهت ناسا.

۳) برابری دو بردار: اگر مقدار و جهت ۲ بردار مساوی باشد می‌گوییم ۲ بردار با هم برابرند در استاتیک ۲ بردار مساوی با هم - با هم هم راستا نیز می‌باشند اگر نقطه واثر ۲ بردار یکی باشد گوییم ۲ بردار هم عرض می‌باشد (برابری طول - هم جهت بودن).

۴) خط حامل بردار: هر بردار روی خطی سوار است. که به آن خط حامل بردار می‌گوییم لازم به ذکر است که هر بردار می‌تواند روی خط حامل خود با همان جهت و ناسا جابجا شود.

۵) کمیت: هر پارامتری که قابل اندازه‌گیری باشد کمیت نامیده می‌شود.
دو نوع کمیت نیز یکی داریم: ۱) اسکالر ۲) برداری

- عملیات بر روی بردارها. بردار واحد i.j.k



PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:

۱- جمع ۲ بردار (برآیند دو بردار).

$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

$\Rightarrow |A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ طول بردار A

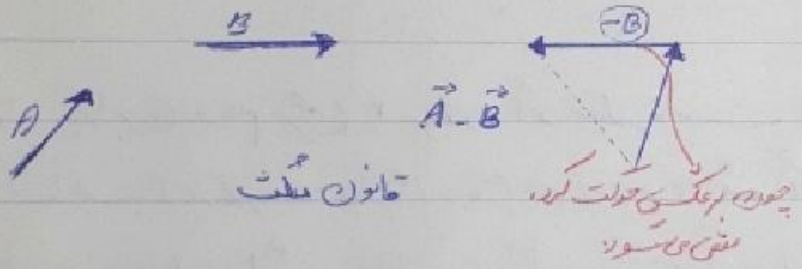
$R = A + B = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$

۲- تفریق دو بردار.

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

$A = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$B = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

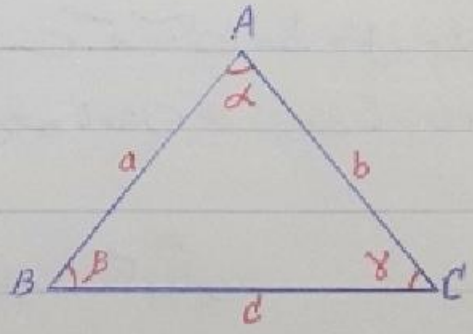


قانون مثلث

چون برعکس جهت کرد، منفی می‌شود

هم مبدا کنید

قانون متوازی الاضلاع



$$\frac{\sin\alpha}{c} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{a}$$

قضیه سینوس‌ها

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{\alpha}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.c.\cos\hat{\gamma}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{\beta}$

قضیه کسینوس‌ها

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

۲ نوع ضرب برداری: داخلی (اسکالری): حروفی آن نقطه یک بردار است. A.B
خارجی (برداری): حروفی آن هم ضاند نقطه باشد هم بردار. A*B

داخلی:

$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$ ← زاویه بین ۲ بردار

$A.B = (a_1 . b_1) + (a_2 . b_2) + (a_3 . b_3)$

خارجی:

$|\vec{A}*\vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta$

بردار حاصل ضرب خارجی برصفحه شکل دهنده ۲ بردار هم واره عمود است.
جهت آن از قانون دست راست بدست می آید.

$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\vec{A}*\vec{B} =$ دترمینان

i	j	k
a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3

۲ و ۳

$= (a_2 . b_3 - a_3 . b_2)\hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 . b_1)\hat{j} + (a_1 . b_2 - a_2 b_1)\hat{k}$

* سطر اول را که حذف می کنیم بعد ستون اول - سطر اول ستون دوم - سطر اول ستون سوم.
* علامت بین پرانتز ها ابتدا مثبت و بعد منفی می شود.

چند ویژگی مهم از ضرب بردارها.

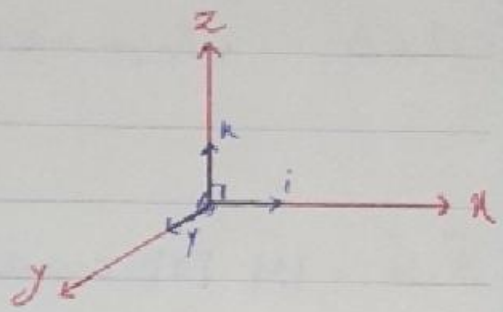
PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:

1/ $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2/ $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$



3/ ضرب داخلی

$i \cdot i = |i| \cdot |i| \cdot \cos 0 = 1$

$i \cdot j = |i| \cdot |j| \cdot \cos 90 = 0$

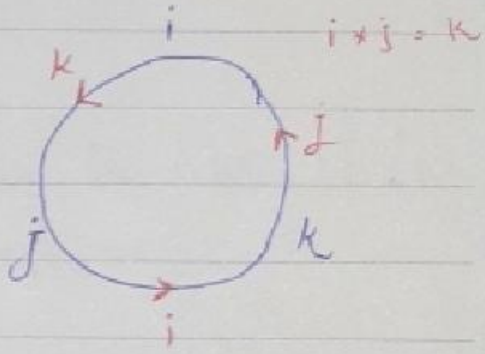
$i \cdot k = |i| \cdot |k| \cdot \cos 90 = 0$

4/ ضرب خارجی

$|i \times i| \cdot \sin 0 = 0$

$|i \times k| \cdot \sin 90 = 1$

$|i \times k| \cdot \sin 90 = 1$



مثال/ اگر بردار $A \cdot B$ بصورت مقابل باشد مطلوبست:

$A+B$ ، $A-B$ ، $A \cdot B$ ، $A \times B$ ، زاویه بین دو بردار A و B چقدر میشود؟

$\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ $\quad$ $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{A} + \vec{B} = A + B = 4\hat{i} - \hat{j}$

$\vec{A} - \vec{B} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$A \cdot B = (3 \times 1) + (2 \times (-3)) - (-1 \times 1) = 3 - 6 - 1 = -4$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{A} \times \vec{B} = (2-3)\hat{i} - (-3+1)\hat{j} + (-9-2)\hat{k} =$$

$$\boxed{-\hat{i} - 4\hat{j} - 11\hat{k}}$$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

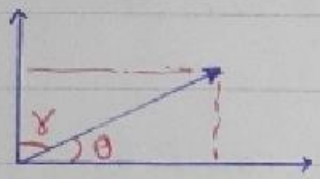
$\theta(A.B)$: $A.B = |A| \cdot |B| \cdot \cos\theta$

$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$ $\quad -4 = (\sqrt{14}).(\sqrt{11}).\cos\theta$

$|\vec{B}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

$$\cos\theta = \frac{-4}{(\sqrt{14}\times\sqrt{11})} \rightarrow \theta = \cos^{-1} = \frac{-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}} = 108.8^\circ$$

تجزیه بردارها: (فقط برای بردارهای مورب است)



$\cos\theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه } \theta}{\text{وتر}} = \cos\theta = \frac{F_x}{F} \rightarrow \boxed{F_x = F.\cos\theta}$

$\sin\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{وتر}} \rightarrow \sin\theta = \frac{F_y}{F} \rightarrow \boxed{F_y = F.\sin\theta}$

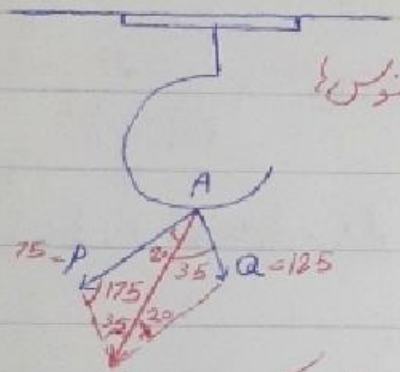
$\vec{F} = (F_x)\hat{i} + (F_y)\hat{j} \rightarrow \boxed{|F| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}}$

$\vec{F} = (F\cos\theta)\hat{i} + (F\sin\theta)\hat{j}$ $\quad \tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)}$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

مثال: 2 نیروی P و Q مطابق شکل به نقطه a یک قلاب وارد می‌شود. اگر $P = 75\,N$ و $Q = 125\,N$ باشد به طریق ترسیمی برآیند را بیابید. آنگاه از قانون متوازی الاضلاع بهره گیرید.



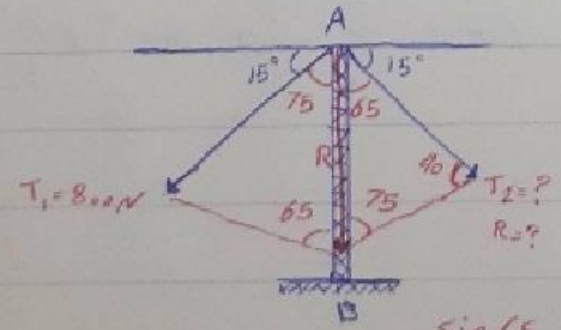
قضیه سینوس‌ها: $\frac{\sin 125}{R} = \frac{\sin 35}{75}$

$$R = \frac{\sin 125 \times 75}{\sin 35} = 1.7.9$$

قضیه کسینوس‌ها: $R^2 = P^2 + Q^2 - 2P.Q.\cos 125^\circ$

$$R^2 = (75)^2 + (125)^2 - 2(75).(125).\cos 125^\circ =$$

مثال: یک کابل تلفن در نقطه A به تیر AB متصل شده است. اگر کشش در سمت چپ این کابل برابر $T_1 = 800\,N$ و کشش T_2 در سمت راست کابل طوری محاسبه نمایید که برآیند نیروهای وارده به A در امتداد AB قائم باشد و سپس مقدار برآیند را نیز محاسبه نمایید.



سینوس‌ها:

$$\frac{\sin 65}{800} = \frac{\sin 40}{R} \rightarrow R = \frac{\sin 40 \times 800}{\sin 65} = 567.39\,N$$

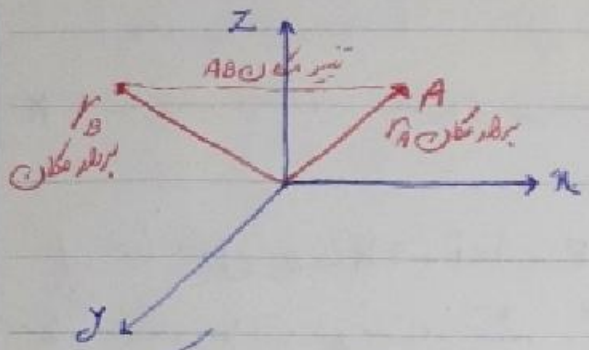
$$\frac{\sin 75}{T_2} = \frac{\sin 65}{800} \rightarrow \frac{\sin 75 \times 800}{\sin 65} = 852.62$$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

3-1 کمیت های استاتیک

1) بردار مکان: برداری است که مبدا به نقطه معین نظر وصل می شود



2) بردار تغییر مکان (جابجایی): برداری که ابتدای حرکت را به انتهای حرکت متصل می کند.

$$\vec{r_A} + \vec{AB} = \vec{r_B} \qquad \vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$$

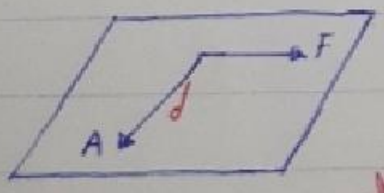
چون B اول نوشته شده ← B اول می آید

3) بردار گشتاور

نیروی وارد عامل روی جسم می کند.

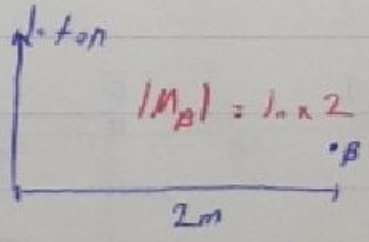
{ 1) حرکت
2) دوران ← عروج از مرکزیت ← (لنگ) ← بردار گشتاور $\vec{M}$

گشتاور بردار { نقطه / محور



$|M| = F.d$

مقدار بردار گشتاور



$|M_B| = 10 \times 2 = 20$

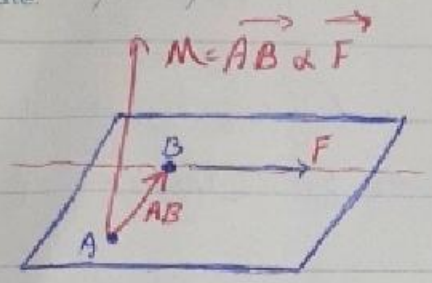
فاصله × نیرو = گشتاور

* اگر نیرو افقی باشد ← فاصله تا نقطه عمودی است
* اگر نیرو عمودی باشد ← فاصله تا نقطه افقی است

PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:



$$\vec{M}_A = \vec{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ (AB)_x & (AB)_y & (AB)_z \\ (F)_x & (F)_y & (F)_z \end{vmatrix}$$

بردار جابجایی — بردار نیرو

* جهت بردار از قانون دست راست بدست می‌آید.

مثال. خط حامل نیروی $F = 10i - 3k$ از نقطه $A\begin{vmatrix}6\\2\\4\end{vmatrix}$ می‌گذرد مطلوبست محاسبه بردار گشتاور این نیرو نسبت به نقطه $B\begin{vmatrix}4\\2\\0\end{vmatrix}$.

$$\vec{M}_B = ? \quad M_B = \vec{BA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 4 \\ 10 & 0 & -3 \end{vmatrix} = +(0-0)i - (-6-40)j + (0-0)k = -46j$$

فقط j باقی می‌ماند

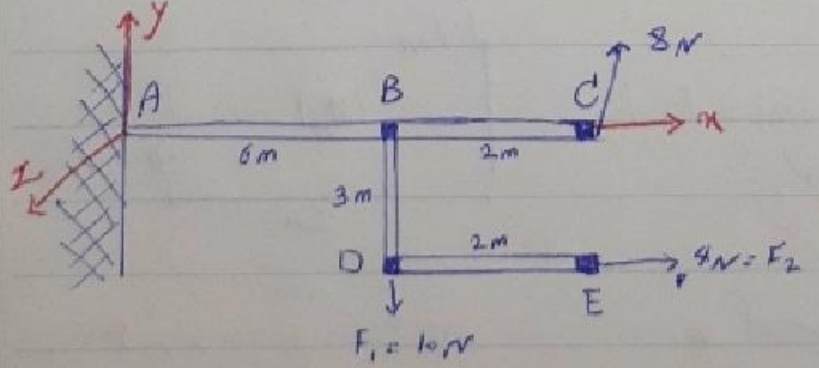
$$\vec{BA} = r_A - r_B = 2i + 4k$$

$$\vec{BA} = 2i + 4k \quad , \quad F = 10i - 3k$$

بردار گشتاور $\boxed{M_B = -46j}$

اندازه بردار گشتاور $\boxed{|M_B| = \sqrt{(-46)^2} = +46}$

مثال. در شکل مقابل بردار گشتاور نیروی اثر موجود بر نسبت نقطه A محاسبه کنید.



PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

$$M_A = (\vec{AB} \times \vec{F_1}) + (\vec{AE} \times \vec{F_2}) + (\vec{AC} \times \vec{F_3})$$

A|: $\vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = 6i \longrightarrow AB = 6i$

B|: $\vec{AE} = \vec{r_E} - \vec{r_A} = 8i - 3j \rightarrow AE = 8i - 3j$ $\quad F_1 = -10j$

C|: $AC = r_C - r_A = 8i \longrightarrow AC = 8i$ $\quad F_2 = 4i$

$F_3 = 8j$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$M_A = [(0-0)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (-60-0)\hat{k}] + [(0-0)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (0-(-32))\hat{k}] +$$

$$[(0-1)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (16-0)\hat{k}] = -60k + 32k + 64k = +16\hat{k}$$

$$M_A = 16k \longrightarrow |\vec{M_A}| = \sqrt[2]{16^2} = 16$$

* از طریق دیگر:

$$|M_A| = (10 \times 6) - (4 \times 3) - (8 \times 8) = 60 - 12 - 64 = \underline{-16}$$

$$6i \times (-10j) = -60k$$

$$(-8i - 3j) \times (4i) = 32i + 12k$$

$$8i \times (8j) = 64\hat{k}$$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

$M_B = ?$ $\leftarrow M_B = (8\times 2) + (4\times 3) = 28$ جایه جا ب سبز 28.

$|\overrightarrow{M_B}| = (BB \times F_1) + (BE \times F_2) + (BC \times F_3)$

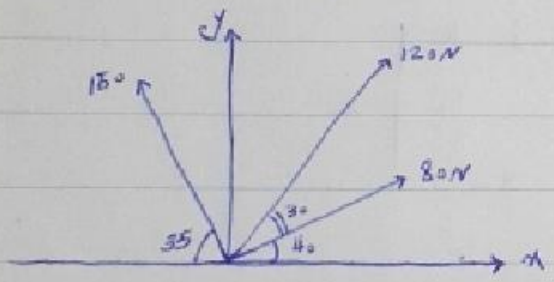
$[(2i-3j) * (4i)] + [2i * 8j] = 28\vec{K}$

$M_B = 28K \rightarrow |M_B| = \sqrt{28^2} = 28.$

$BE = r_E - r_B = 2i - 3j$

$BC = r_C - r_B = 2i$

مثال. مولفه های x و y هریک از نیروهای داده شده را تحلیل کنید.



$\vec{F_x} = (80\cos 40)i + (120\cos 70)i - (150\cos 35)i = -72.5i$

$\vec{F_y} = (80\sin 40)j + (120\sin 70)j + (150\sin 35)j = 283.8j$

$F = (F_x)i + (F_y)j \rightsquigarrow F = -12.5i + 283.8j$

PDF Compressor Free Version

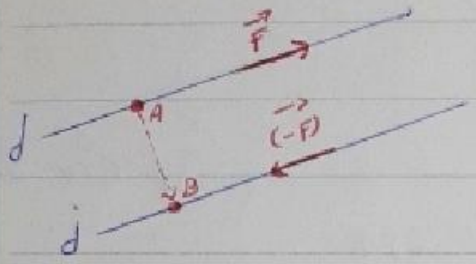
Date: / /

Subject:

4-1. کوپل (زوج نیرو)

2 نیروهم اندازه، مخالف الجهت که روی خط حامل های جداگانه اند.

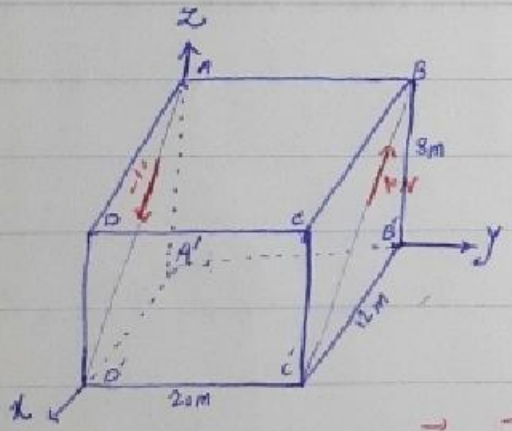
اثر زوج نیرو مربوط به گشتاور حول یک نقطه است.



$$\vec{M} = \vec{AB} \times (-\vec{F})$$

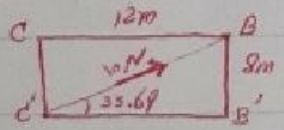
$$\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}$$

مثال: در شکل نشان داده شده گشتاور زوج نیرو را محاسبه کنید.



* ۲ روش قابل حل است.

راه حل اول: تجزیه. $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$ $AB = r_B - r_A = 20\,j$



$A \begin{vmatrix} 0 \\ 8 \end{vmatrix}$ $B \begin{vmatrix} 20 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\tan\alpha = \frac{8}{12} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8}{10}\right) = 33.69$$

$$F_M = F\cos\alpha = 10\cos 33.69$$

$$F_\alpha = F\sin\alpha = 10\sin 33.69$$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

$\vec{F} = (F_x)\hat{i} + (F_z)\hat{k}$ $\vec{F} = (10\cos 33.69)\hat{i} + (10\sin 33.69)\hat{k}$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 10\cos 33.69 & 0 & 10\cos 33.69 \end{vmatrix} =$$

روش دوم.

$C'B = r_B - r_{C'} = (0-12)i + (2-2)j + (8-0)k$

$C'B = -12i + 8k \rightarrow |C'B| = \sqrt{(-12)^2 + (8)^2} = \sqrt{208}$

بردار یکه

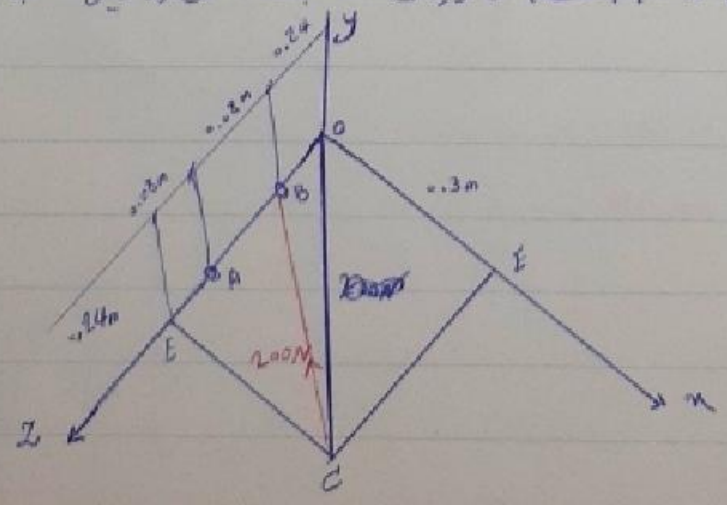
$$\lambda_{C'B} = \frac{C'B}{|C'B|} = \frac{-12i + 8k}{\sqrt{208}}$$

$$\lambda_{C'B} = \frac{-12}{\sqrt{208}}i + \frac{8}{\sqrt{208}}k$$

مقدار بردار حامل یا نیرو

$$\vec{F} = \lambda_{C'B} \times |F| = \left(\frac{-12}{\sqrt{208}}i \times \frac{8}{208}\right) \times 10 \qquad F = -\frac{120}{\sqrt{208}}i + \frac{80}{\sqrt{208}}k$$

مثال: یک صفحه مستطیلی با 2 بست A و B و سیم OC نگه داشته شده است کشش در نقطه C برابر 200N می‌باشد. گشتاور نیرویی که سیم به نقطه C وارد می‌کند نسبت به محورهای زیر محاسبه کنید.



الف. حول نقطه A.

ب. حول نقطه O.

ج. حول محور OC.

د. حول محور OE.

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

$\vec{AC} = r_C - r_A = 0.3\hat{i} + 0.0\hat{8}\hat{k}$ $AC = 0.3\hat{i} + 0.0\hat{8}\hat{k}$

(ب) $M_A = ?$ $M_A = AC * \vec{F}$

$CD = r_D - r_C = -0.3\hat{i} + 0.24\hat{j} - 0.16\hat{k}$

$|\vec{CD}| = \sqrt{(0.3)^2 + (0.2)^2 + (-0.16)^2} = \sqrt{0.09 + 0.06 + 0.02} = 0.38$

$\lambda_{\vec{CD}} = \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = \frac{-0.3\hat{i} + 0.24\hat{j} - 0.16\hat{k}}{0.38} = -0.79\hat{i} + 0.63\hat{j} - 0.42\hat{k}$

$\vec{F} = \lambda_{\vec{CD}} \times |\vec{F}|$ (200) $\rightarrow F = -158\hat{i} + 126\hat{j} - 84\hat{k}$ *

$$M_A = AC \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.3 & 0 & 0.8 \\ 138 & 126 & -84 \end{vmatrix}$$

F دارای بیشترین مقدار

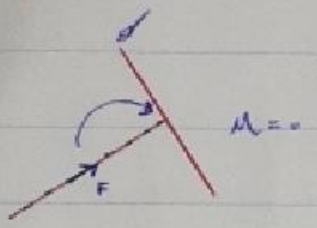
$M_O = \vec{OC} \times \vec{F}$ ☆ $OC = r_C - r_O = 0.3\hat{i} + 0.4\hat{k}$

$$M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.3 & 0 & 0.4 \\ -158 & 126 & -54 \end{vmatrix}$$

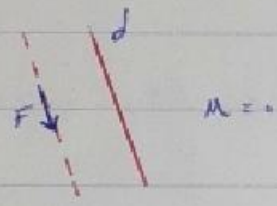
PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

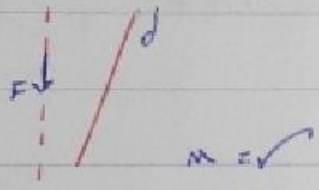
5-1. گشتاور حول محور



1. خط حامل نیرو محور را قطع کند.



2. خط حامل نیرو موازی محور باشد

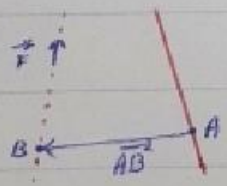


3. خط حامل نیرو نه با محور موازی باشد و نه متقاطع باشد.

حل مسئله:

1. یک نقطه دلخواه روی محور در نظر می‌گیریم و یک نقطه دیگر روی خط حامل نیرو انتخاب می‌کنیم.

2. گشتاور نیروی F نسبت به نقطه‌ای که روی محور انتخاب کردیم محاسبه می‌کنیم



$\vec{M} = \vec{AB} * \vec{F}$

گشتاور حول یک محور حروفی، اسکی یک عدد است.

3. اگر تصویر مولفه M را روی محور l حساب کنیم ← جواب مسئله می‌رسیم.

- برای بدست آوردن تصویر بردار یکه (n) خط l را پیدا کرده و آنرا در M ضرب داخلی می‌کنیم بعد

تصویر بدست می‌آید. * پایان فصل ۱ *

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

نکته: هرگاه اندازه یک بردار برای ما معلوم باشد و ما بخواهیم آن را حساب کنیم ابتدا باید در راستای خط حامل نیرو 2 نقطه A و B انتخاب کرده.

مثلاً A و B و بردار جابجایی AB بدست آوردیم. $(r_B - r_A)$ پس اندازه بردار AB نابدست می‌آوریم و سپس بردار AB تقسیم بر اندازه بردار $|AB|$ می‌کنیم.

تا λ_{AB} لامدا بدست آید و در اکثر λ_{AB} را در اندازه بردار مان شده ضرب می‌کنیم.

حاصل کارمان بردار نیرو است.

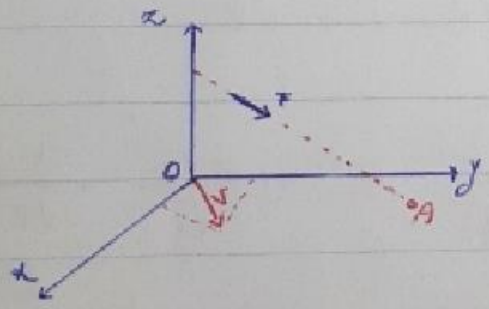
$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} \qquad F = (\lambda_{AB}) \cdot F$$

مثال: مطلوبت محاسبه گشتاور نیروی $F = 100i + 200j - 500k$ نسبت به:

الف) مبدا

ب) نیم ساز صفحی اول حط حامل نیرو F از نقطه A(5, -2, 4) عبور کند.

ج) بردار گشتاور این نیرو نسبت به مبدا مختصات نیز محاسبه کنید.



$$F = 100\hat{i} + 200\hat{j} - 500\hat{k}$$

$$A \begin{vmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

ج- $\vec{M}_o = \vec{o_B} * \vec{F}$

$$OA = r_A - r_O = (5-0)\hat{i} + (-2-0)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$$

$$= \vec{oA} = 5i - 2j + 4k$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -2 & 4 \\ 100 & 200 & -500 \end{vmatrix} = [1000 - 800]i - [-2500 - 400]j - [1000 - (-200)]k$$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

$= 200\vec{i} + 2900\vec{j} + 1200\vec{k}$

برآیند گشتاورها

$\vec{M_o} = 200i + 2900j + 1200k \rightarrow |\vec{M_o}| = \sqrt{(200)^2 + (1900)^2 + (1200)^2}$

الف) $\vec{M_o} = \vec{OA} \times \vec{F} = 200i + 2900j + 1200k$

$|M_{ol}|$ = بردار یکه محور • بردار گشتاور

$= (i) \cdot (200i + 2900j + 1200k) = 200$

چون i و k نداریم فقط i در i ضرب می‌شود

ب) $|M_{oy}|$ = بردار یکه نیم ساز xy • بردار گشتاور

$V = i + j \rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\lambda_{oy} = \frac{i+j}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \rightarrow \lambda_{oy} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$

$|M_{oy}| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}\right) \cdot (200i + 2900j + 1200\underset{\times}{\hat{k}})$

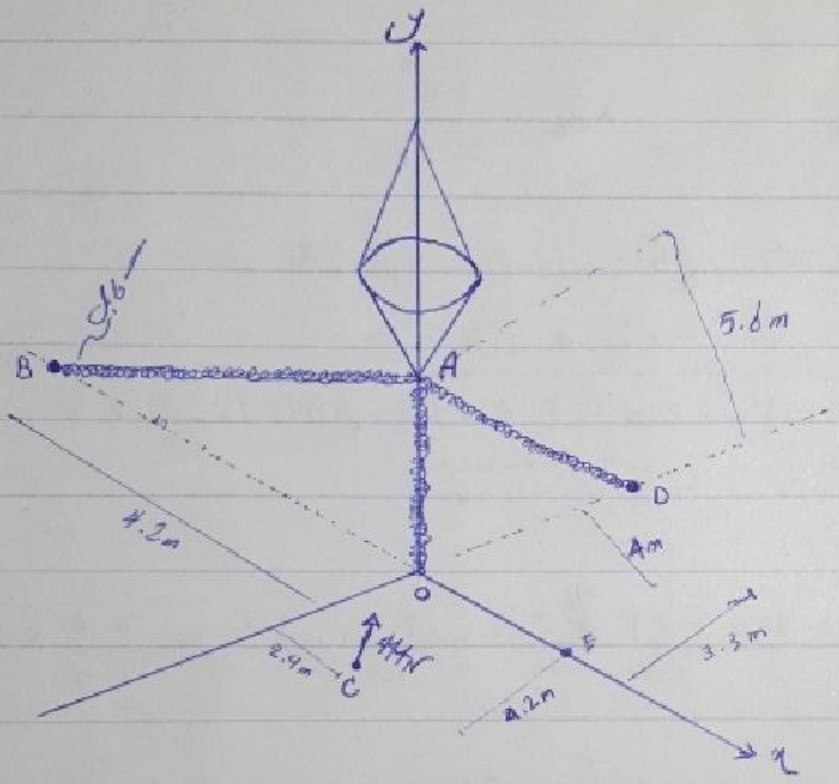
$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times 200\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times 2900\right)\right] = \frac{200}{\sqrt{2}} + \frac{2900}{\sqrt{2}} = \frac{3100}{\sqrt{2}}$

★ چون k نداریم ضرب می‌شود

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

مثال: بالفی مطابق شکل مابسه کابل به زمین بسته شده است. اگر نیروی P در شکل برابر 444N کشتاور این نیرو را نسبت به مبدا مختصات زیر محاسبه نمایید.



الف) گشتاور نیروی P نسبت به مبدا مختصات محاسبه کنید.

ب) بردار گشتاور نیرو نسبت به نقطه d محاسبه کنید.

ج) بردار گشتاور نسبت به AB محاسبه کنید.

د) بردار گشتاور نسبت به محور OA محاسبه کنید.

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

الف) $\vec{M}_O = ?$ $\vec{M}_O = \vec{OA} * \vec{P}$ O(0,0,0) A(0,5.6,0) C(2.4, 0, 4.2)

$OA = r_A - r_O = (5.6 - 0)\vec{j}$ $\vec{OA} = 5.6\,\vec{j}$

$P = |P| \cdot \lambda_{\vec{CA}}$ $\lambda_{CA} = \dfrac{\vec{CA}}{|CA|}$

چون نیرو به سمت A است.

$d_A = r_A - r_C = (0 - 2.4)i + (5.6 - 0)j + (0 - 4.2)k \rightarrow$

$CA = 0 - 2.4i + 5.6j - 4.2k$

$|\vec{CA}| = \sqrt{(-2.4)^2 + (5.6)^2 + (-4.2)^2} = \sqrt{54.76} = 7.4$ اندازه بردار

$5.76 \quad 31.36 \quad 17.64$

$\lambda_{CA} = \dfrac{CA}{|\vec{CA}|} = \dfrac{-2.4i + 5.6j - 4.2k}{7.4} = \dfrac{-2.4}{7.4}i + \dfrac{5.6}{7.4}j - \dfrac{4.2}{7.4}k$

$= 0.32\,i + 0.75\,j - 0.56\,k$

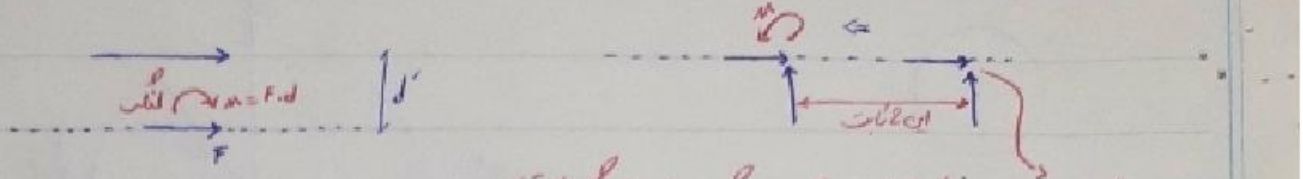
$\vec{P} = 444 \times [-0.32i + 0.75j - 0.56k] = -142.8i + 333j - 248.6k$

$$\vec{M}_O = \vec{OA} * \vec{P} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 5.6 & 0 \\ -142.8 & 333 & -248.6 \end{vmatrix} = [(5.6 \times (-248.6))i] - [5.6 \times (-142.8)k] = -639.52$$

ب) $\vec{MD} = \vec{DA} * \vec{P}$ $\vec{M}_B = \vec{BC} \times \vec{D}$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

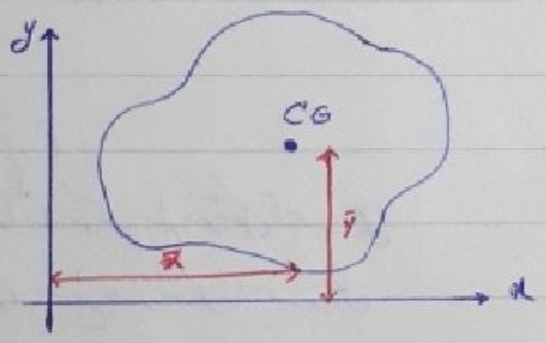


این چون روی خط حامل، عقب برده گرده بازدید نگرده است.

اگر نیرو را از روی خط حامل خود بخواهیم روی خط حامل دیگر انتقال دهیم، یک لنگر خواهیم

فصل دوم مرکز سطح - مرکز ثقل یا مرکز جرم

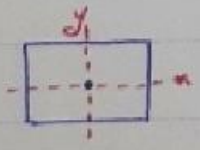
تعریف: مرکز جرم نقطه‌ای است که برآیند نیروی وزن ذرات آن نقطه معادل باشد.
تک تک ذرات جسم باشند.



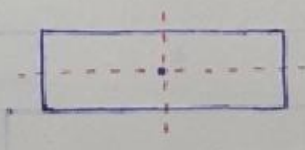
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

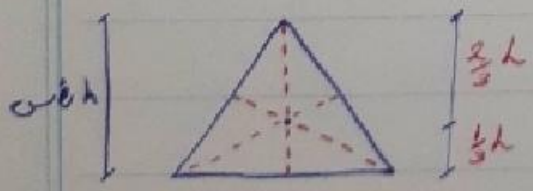
هدف پیدا کردن مرکز سطح سطوح مرکب: (مرکز سطح سطوح منظم)

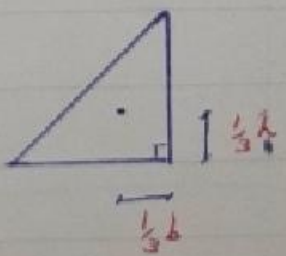


a^2



طول × عرض





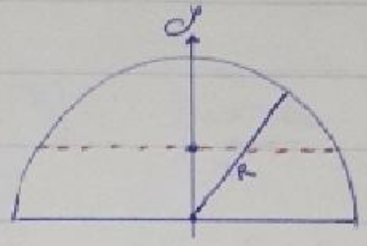
$\frac{1}{2}$ قاعده × ارتفاع

PDF Compressor Free Version

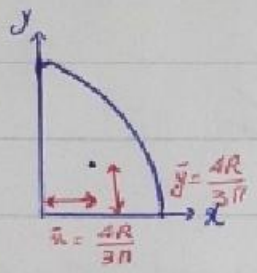
Date: / /

Subject:

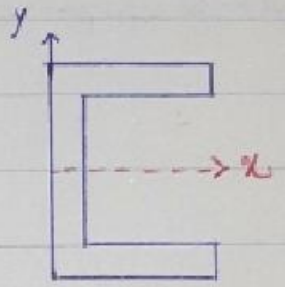
$A = \pi R^2$



$A = \frac{\pi R^2}{2}$ $\quad \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$

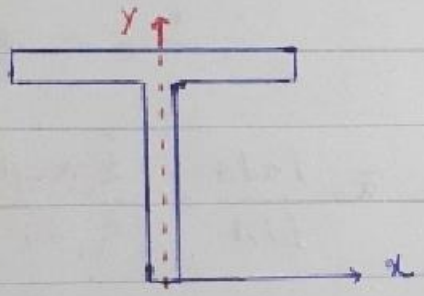


$A = \frac{\pi R^2}{4}$



شکل نسبت به محور x متقارن است.

$\bar{x} = ?$ $\quad \bar{y} = 0$



شکل نسبت به محور y متقارن است.

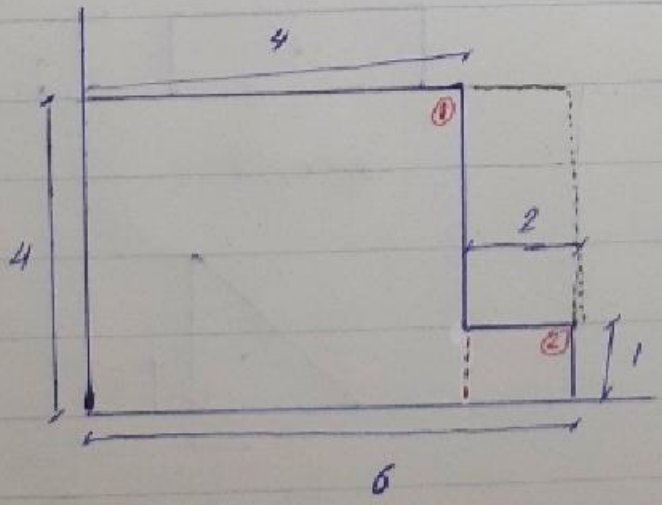
$\bar{y} = ?$ $\quad \bar{x} = 0$

$(\bar{x}$ و $\bar{y})$

$\bar{x}$: فاصله مرکز سطح هر شکل تا محور y.

$\bar{y}$: فاصله مرکز سطح هر شکل تا محور x.

مثال: مرکز سطح شکل ان زیر را محاسبه کنید.



PDF Compressor Free Version

Date: Subject:

روش اول

شکل	مساحت A_i	فاصله مرکز سطح تا محور y $\bar{x}$	$\bar{x}_i A_i$	فاصله مرکز سطح تا محور x $\bar{y}$	$\bar{y}_i A_i$
شکل 1	$4\times4=16$	2	32	2	32
شکل 2	$2\times1=2$	5	10	.5	1
Σ	18	-	42	-	33

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{42}{18} = 2.33$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{33}{18} = 1.83$$

روش دوم

$$\bar{x} = \frac{(4\times4\times2)+(2\times1\times5)}{(4\times4)+(2\times1)} = 2.33$$

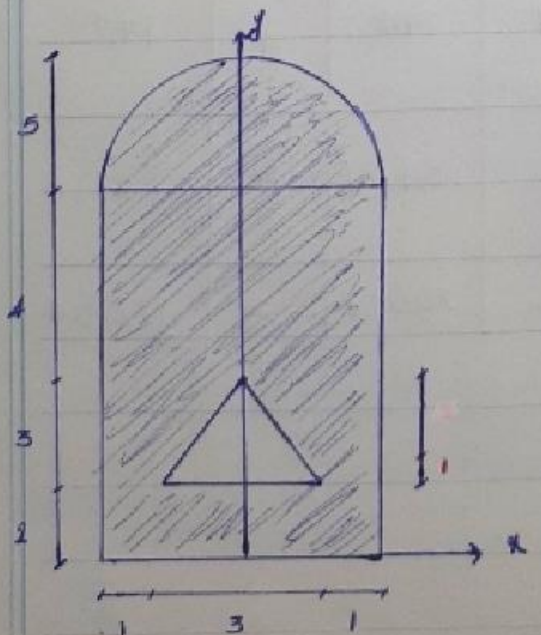
$$\bar{y} = \frac{(4\times4\times2)+(2\times1\times.5)}{(4\times4)+(2\times1)} = 1.83$$

روش سوم

$$\bar{x} = \frac{(4\times6\times3)\ominus(2\times3\times5)}{(4\times6)\ominus(2\times3)} = \frac{72-30}{24-6} = \frac{42}{18} = 2.33$$

$$\bar{y} = \frac{(4\times6\times2)\ominus(2\times3\times2.5)}{(4\times6)\ominus(2\times3)} = \frac{48-15}{18} = \frac{33}{18} = 1.83$$

مثال: مرکز سطح شکل داده شده را بدست آورید.



حل: شکل نسبت به محور y متقارن است. $\bar{x}=0$

PDF Compressor Free Version

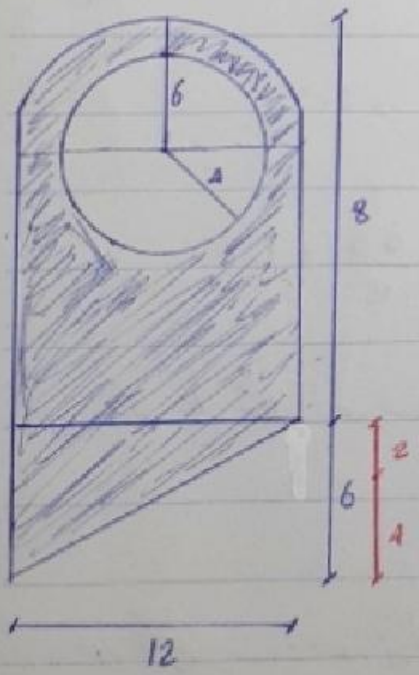
• Date: / /

Subject:

A نیم دایره $= \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \times (5)^2}{2} = \frac{3.14 \times 25}{2} = 39.25$

شکل	A_i	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_i A_i$
مستطیل توپر	45	4.5	202.5
نیم دایره توپر	39.25	11.12	436.46
مثلث توخالی (منفی)	-4.5	3	-13.5
Σ	79.25	—	625.46

$$\bar{y} = \frac{625.46}{79.25} = 7.84$$



شکل	A_i	$\bar{x}_i$	$\bar{x}_i A_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_i A_i$
مستطیل توپر	96	6	576	10	960
نیم دایره توپر	56.2	6	337.2	16.55	930.11
مثلث توپر	36	4	144	4	144
دایره توخالی	-5.24	6	-31.44	14	-73.36
Σ	137.96	—	755.76	—	892.34

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i A}{\Sigma A_i} = \frac{755.76}{137.96} = 5.47$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i A}{\Sigma A_i} = \frac{892.34}{137.96} = 6.46$$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

فصل سوم تعادل - محاسبه ی عکس العمل اتکیه گاهی

تکیه گاه: عاملی است که جلوی حرکت را می گیرد.

انواع عکس العمل در تکیه گاهها:

1- تکیه گاه غلطکی
* اجازه حرکت در راستای قائم ندارد.
* اجازه حرکت در راستای افق را دارد.
* دوران (چرخش - شیب) دارد. $M \neq 0$
$R=1$

2- تکیه گاه مفصلی
* اجازه حرکت در راستای قائم را ندارد.
* اجازه حرکت در راستای افق را ندارد.
* اجازه دوران دارد. $M \neq 0$
$R=2$

3- تکیه گاه گیردار
* اجازه حرکت در راستای قائم.
* اجازه حرکت در راستای افق را ندارد.
* اجازه دوران ندارد. $M \neq 0$
$R=3$

4- تکیه گاه لغزنده شده (مفصل برشی)
* اجازه جابجایی در راستای قائم (عمود بر سطح) را دارد.
* اجازه جابجایی در راستای افق را ندارد.
* اجازه دوران ندارد.
$R=2$

5- تکیه گاه تکلوپی
* اجازه حرکت در راستای قائم ندارد.
* اجازه حرکت در راستای افق دارد.
* دوران ندارد.
$R=2$

6- تکیه گاه فنر قائم
$R=1$

7- تکیه گاه فنر پیچشی
$R=1$

انواع معادلات تعادل

(الف) در صفحه (2D)

$\sum M = 0$ $+\uparrow \sum F_y = 0$ $\sum F_n = 0$

(ب) در فضا (3D)

$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_n = 0$

$\sum M_n = 0$ $\sum n_y = 0$ $\sum n_z = 0$

PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:

محاسبه ی عکس العمل ای تکیه گاهی :

- مراحل حل مسئله :

۱) گام اول ابتدا عکس العمل ای تکیه گاهی را حذف کرده و بجای آن نیروهای مجهول را می گذاریم.

۲) چنانچه در سازه بار گسترده مشاهده نمودیم باید آنها به بار متمرکز تبدیل کنیم و بار متمرکز شده آنها در مرکز سطح شکل بارگذاری شده قرار دهیم.

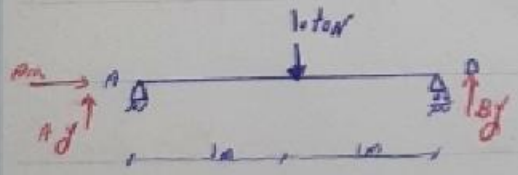
۳) سپس با نوشتن معادلات تعادل در صفحه ($\Sigma M=0$. $\Sigma F_y=0$. $\Sigma F_x=0$) مجهولات را محاسبه می کنیم.

- نکته مهم :

ما فقط برای محاسبه عکس العمل ای تکیه گاهی اجازه داریم بار گسترده را به بار متمرکز تبدیل کنیم، در غیر این صورت اجازه چنین کاری را نداریم.

بار گسترده → بار متمرکز

مثال : عکس العمل ای تکیه گاهی سازه ای زیر را محاسبه نمایید.



$\Sigma F_x=0 \rightarrow A_x=0$

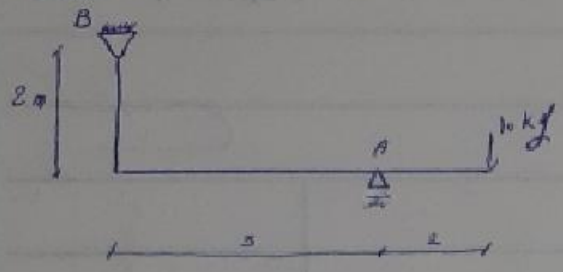
$\Sigma M_A=0 \qquad (10\times 5) = B_y \times 5$

$10\times 2\, B_y = 5\text{ton}$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow A_y - 10 + 5 = 0 \rightarrow \boxed{A_y = 5\text{ton}}$

PDF Compressor Free Version

Date / / Subject



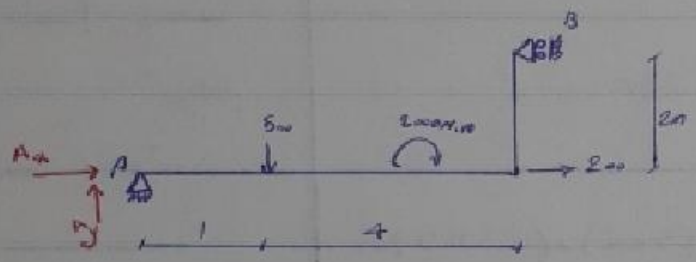
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$

$\Sigma M = 0 \rightarrow 10 \times 5 = A_y \times 3$

$50 = 3A_y \quad \frac{50}{3} = 16.66$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \rightarrow B_y + 16.66 - 10 = 0$

$B_y = 10 - 16.66 \rightarrow \boxed{B_y = -6.66} \downarrow$



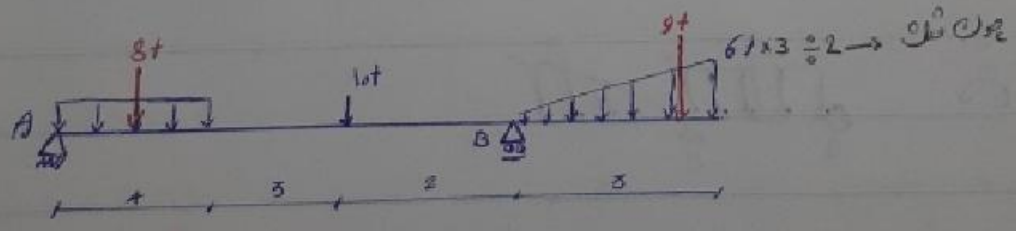
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y - 5 = 0 \quad A_y = 5$

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow (5 \times 1) + (B_M \times 2) + 2 = 0$

$B_M = 12.5 kN$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow B_x + 2 - 12.5 = 0$

$B_x = 12.5 - 2 = 10.5 \rightarrow A_x = 10.5 kN$



$\overrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow (8 \times 2) + (10 \times 7) + (9 \times 11) = B_y \times 9$

$16 + 70 + 99 = 9B_y$

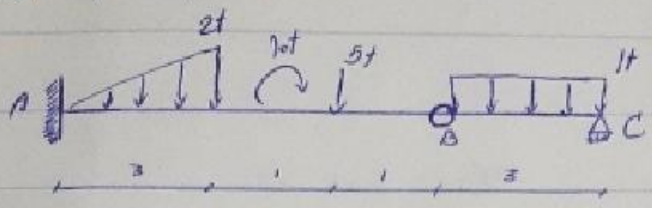
$185 = 9B_y \rightarrow B_y = 20.55t$

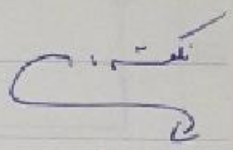
$+\uparrow \Sigma F_y = A_y - 8 - 10 - 9 + 20.55 = 6.45t \rightarrow A_y = 6.45t$

PDF Compressor Free Version

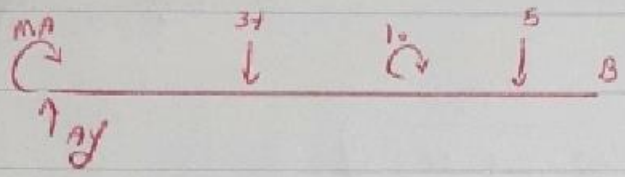
Date: / /

Subject:





$\Sigma f_x = 0 \rightarrow A_x = 0$



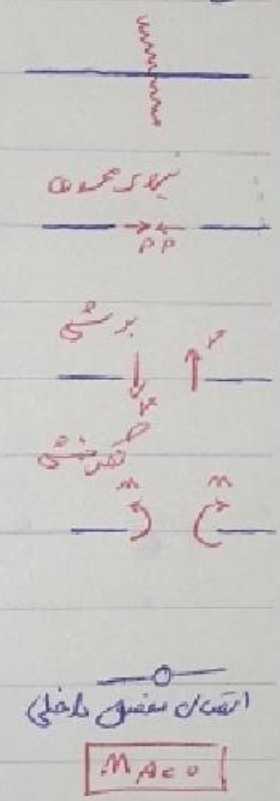
$\Sigma f_y = 0 \rightarrow A_y - 3 - 5 - 1.5 = 0$

$A_y = 3 + 5 + 1.5 \rightarrow A_y = 9.5t$

$\Sigma m_A = 0 \rightarrow M_A + (3 \times 2) + 10 + (5 \times 4) + (1.5 \times 5) = 0$

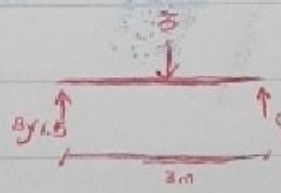
$M_A + 6 + 10 + 20 + 7.5 = 0$

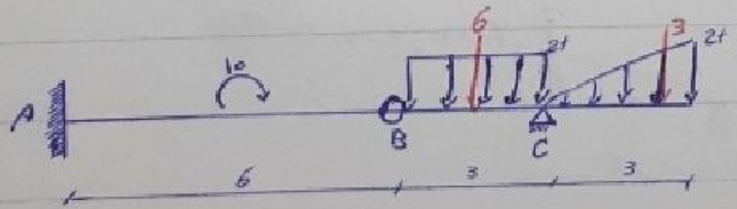
$M_A = -6 - 10 - 20 - 7.5 \rightarrow M_A = 43.5$

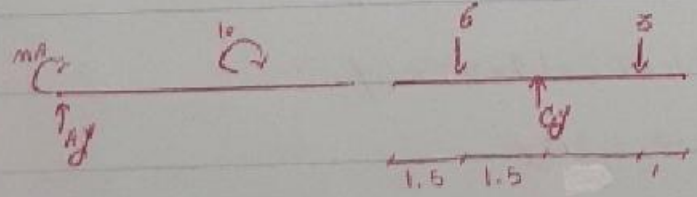


$\Sigma f_x = 0 \rightarrow -B_x = 0 \rightarrow B_x = 0$

$B_y = 1.5t = C_y = 1.5$







$\Sigma f_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

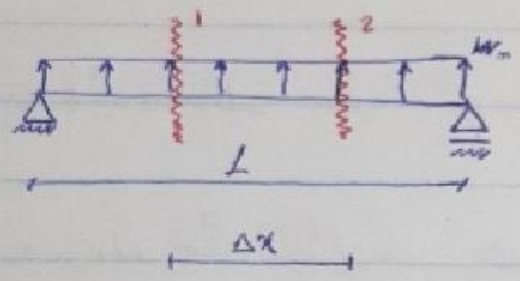
$\Sigma f_y = 0 \rightarrow A_y - 5 - 1 = 0 \quad A_y = 6t - A_y = 6t$

PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:

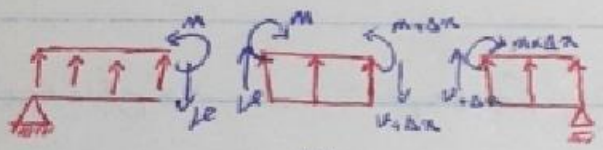
• اسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی:

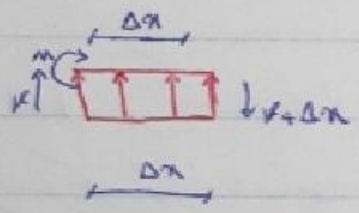


$\Delta x \to 0 \longrightarrow \Delta x \sim dx$

$\Delta V \to 0 \longrightarrow \Delta V \sim dV$

$\Delta m \to 0 \longrightarrow \Delta m \sim dm$





$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow V + w_n \cdot \Delta x - (V - \Delta V) = 0$

$V + w_n \cdot \Delta x - V - \Delta V = 0$

$* \quad w_n \cdot \Delta x = \Delta V$

$w_n = \frac{\Delta V}{\Delta x}$ ①

$\int_{x_1}^{x_2} w_n \cdot dx = V_2 - V_1$ ②

$V = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$ ③

$** \quad \Delta x \cdot V - \Delta x = 0 \longrightarrow \Delta x \cdot V = \Delta m$

$\int_{m_1}^{m_2} V \cdot dm = m_2 - m_1$ ④

تفسیر رابطه ۴:

را مشتق یا شیب نمودار نیروی برشی در طول تیر برابر است با شدت بار گسترده وارد بر تیر.

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

2. تغییرات نیروی برشی در طول تیر برابر است با مساحت بار گسترده وارد بر تیر.

3. مشتق با شیب نمودار لنگر خمشی در طول تیر برابر است با نیروی برشی.

4. تغییرات لنگر خمشی در طول تیر برابر است با مساحت زیر نمودار نیروی برشی.

نکات قابل توجه در ترسیم دیاگرام های نیروی برشی و لنگر خمشی:

1. ابتدا عکس العمل ها تکیه گاهی را حساب کرده.
2. در محل بارهای متمرکز پرش یا جهشی وجود دارد.
3. منحنی داخلی در ترسیم دیاگرام نیروی برشی تاثیری ندارد و در ترسیم دیاگرام لنگر خمشی به عنوان یک نقطه کنترلی عمل می کند.
4. دیاگرام نیروی برشی حتما باید بسته شود (به صفر برسد).
5. در ترسیم دیاگرام لنگر خمشی باید به نوع تکیه گاه توجه شود. چنانچه تکیه گاه مفصلی یا غلطکی باشد این نقطه از صفر شروع و به صفر ختم می شود.

* اگر تکیه گاه گیردار باشد برای رسم دیاگرام لنگر خمشی از لنگر گیردار تکیه گاه شروع به رسم می کنیم.

6. با توجه به اینکه پرش انتگرال بار خمشی انتگرال برشی است در صورتی که تاج بار بصورت یک چند جمله ای از درجه n باشد در هر مرحله یک درجه به آن اضافه می شود.

* نکته: درجه 2 منحنی می شود.

درجه یک می شود یک خط مایل.

بار گسترده خط افقی درجه یک است.

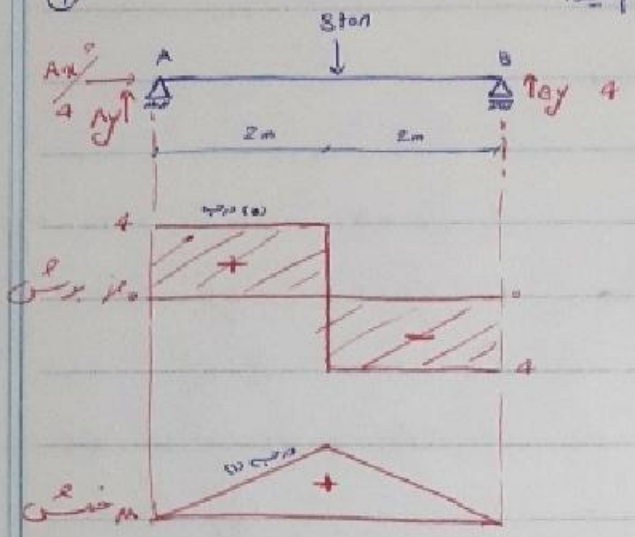
درجه 3 منحنی

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

مثال: دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیرهای زیر را رسم کنید.

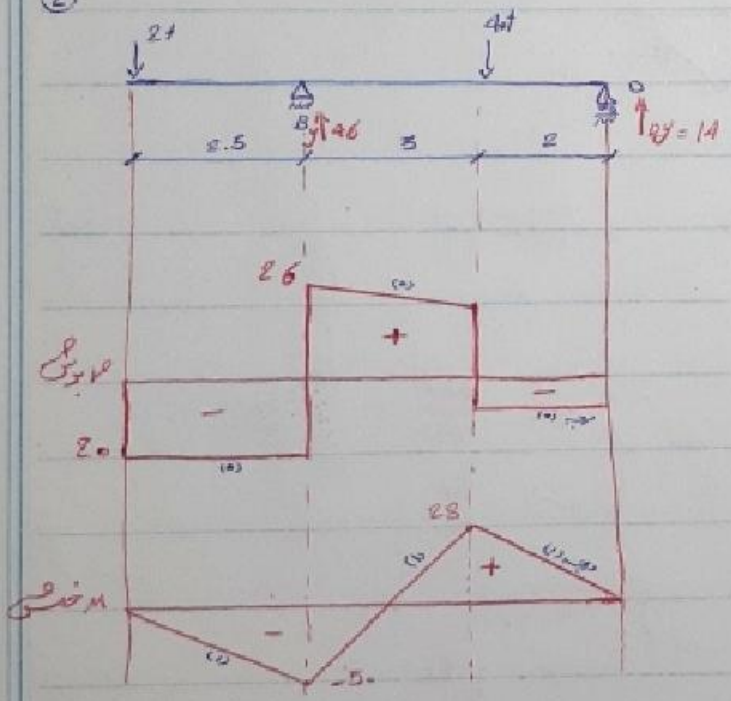
①



* چون نیرو متمرکز در وسط تیر است نمودار برشی مثلثی و لنگر خمشی سهمی درجه ۲ می‌شود.

نیروی تکیه‌گاه‌ها از تقارن محاسبه می‌شود.

②



$\sum M_B = 0 \rightarrow$

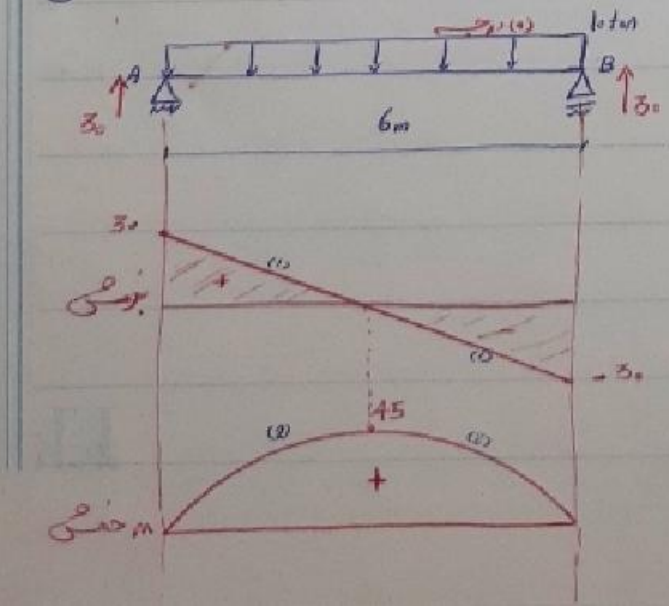
$40 \times 3 = D_y \times 5 + (20 \times 2.5)$

$120 = 5 D_y \Rightarrow D_y = 14$

$\sum F_y = 0 \rightarrow -20 + B_y - 40 + 14 = 0$

$B_y = 60 - 14 = 46 \quad B_y = 4y$

③



مساحت بار ← برشی

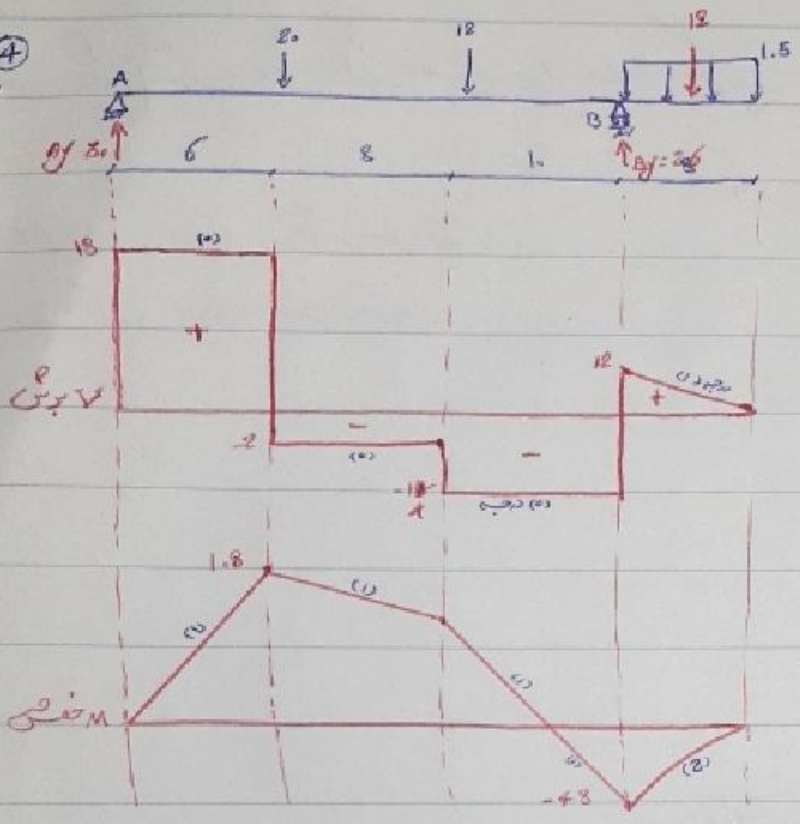
مساحت برشی ← خمش

PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:

④



$\Sigma M_A = 0 \rightarrow$

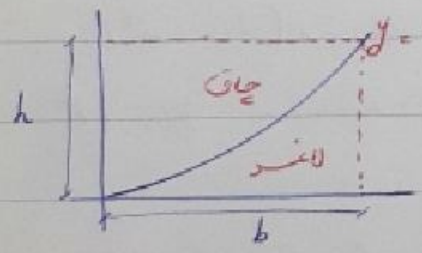
$(20 \times 4) + (12 \times 14) + (12 \times 28) =$

$By \times 24 \quad By = 26$

$\Sigma fy = 0 \rightarrow Ay - 20 - 12 + 26 - 12 = 0$

$Ay = 18$

نکته:



$y = k x^n \quad n(n \neq 1)$ ← اسپن ندرل

مساحت { چاق: $\frac{nbh}{n+1}$ ، لاغر: $\frac{bh}{n+1}$

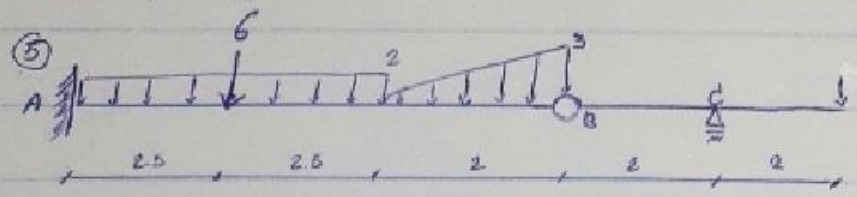
درجه 2 { چاق $A = \frac{2}{3}$ ، لاغر $A = \frac{1}{3} bh$

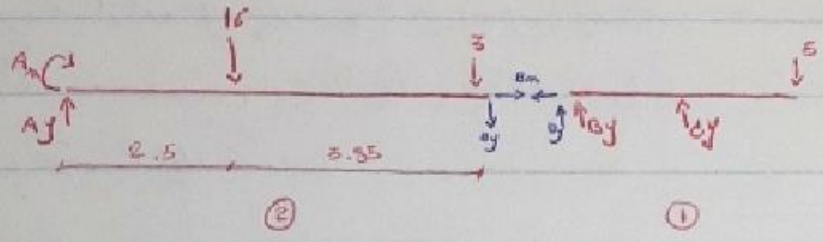
مثال:

PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:





$\leftarrow \sum F_y = 0 \rightarrow Ay - 16 - 3 + 5 = 0$

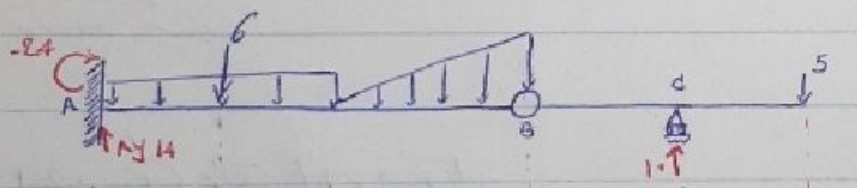
$Ay = 14$

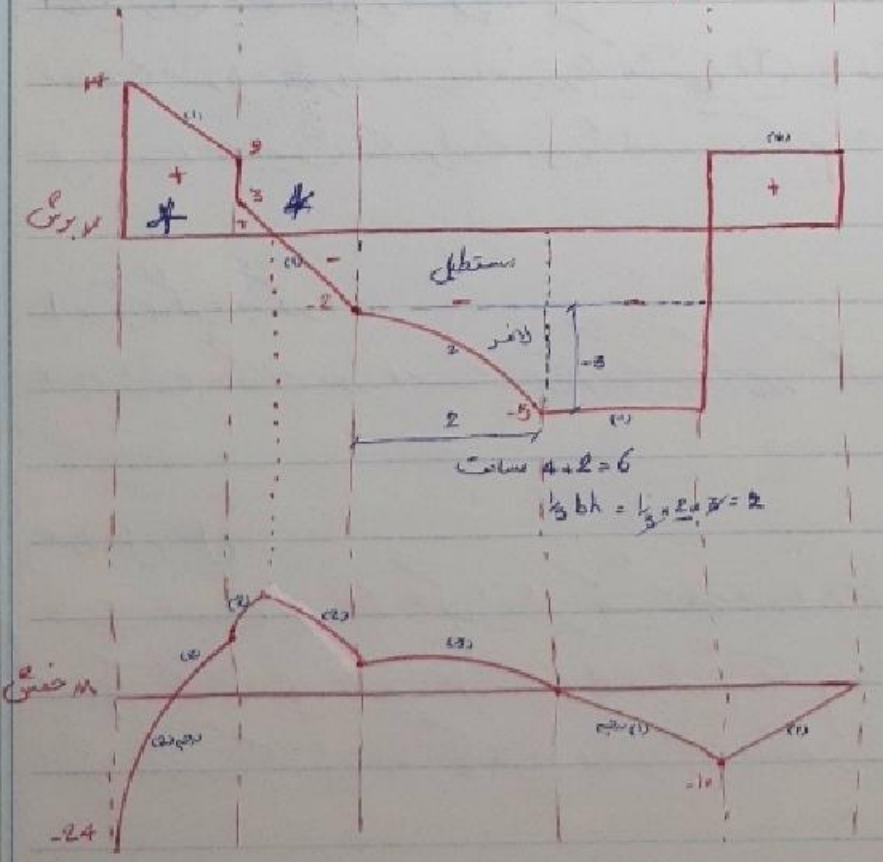
$\leftarrow \sum F_x = 0 \rightarrow Bx = 0$

$\leftarrow \sum M_B = 0 \rightarrow Cy \times 2 = 5 \times 4 = 0 \quad Cy = 10$

$\leftarrow \sum F_y = 0 \rightarrow By + 10 - 5 = 0 \quad By = -5 \uparrow$

$\leftarrow \sum M_A = 0 \rightarrow MA + (16 \times 2.5) + (3 \times 6.35) = 5 \times 7 \quad M = -24$





★ مساحت ذوزنقه

$\frac{\text{(ضلع بزرگ + ضلع کوچک)}}{2} \times$ ارتفاع

★

3	x
2	2.5 − x

$2x = 7.5 - 3x$

$5x = 7.5 \rightarrow x = 1.5$

$\frac{\text{برشی}}{\text{شدت بار گسترده}} = \frac{3}{2} = 1.5$

PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:

- خرپا

تعریف: از اتصال چند عضو 2 سر مفصل یا لنگ خرپا به وجود می آید. ساده ترین نوع خرپا، خرپا مثلثی است که با گسترش این المان مثلثی می توان خرپا را گسترش داد و از اتصال چند خرپا ساده، خرپا مرکب ایجاد می شود.

- نکته: هر خرپا باید به صورت سفت کیر و انعطاف در تحمل کرده ها طراحی شود. کره عمل تلاقی اعضاست. حرم های چهار عضلی که توسط اتصالات مفصلی باین ولولا به هم وصل شده اند کاملاً ناپایدار بوده و با اعمال کوچک ترین نیرو درهم می ریزد، حرم های مثلثی حرم های پایداری هستند که در اثر اعمال نیرو پایداری خود را حفظ می کنند و شکل آنها هم نمی ریزد مگر اینکه اعضا در اثر نیرو برسیده شود.

انواع روش برای تحلیل خرپا:

اعضای خرپا صرفاً تحت نیروی کششی (T) یا فشاری (C) واقع می شود برای حل خرپا می بایست مقادیر این نیروها را بدست آوریم. 2 روش برای حل خرپا متداول است:

1 روش گره به گره:

این روش هنگامی مورد استفاده قرار می گیرد که نیرو در کلیه ی اعضا خرپا مد نظر باشد.

مراحل حل:

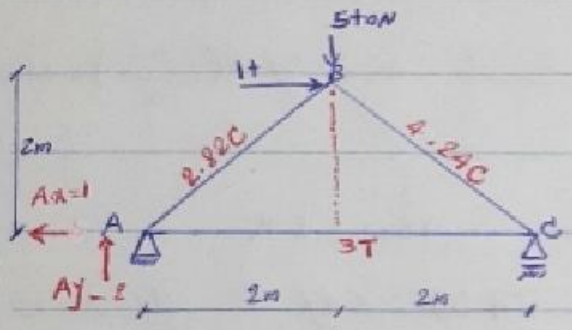
عبارت است از ابتدا واکنش های تکیه گاهی خرپا را تعیین می کنیم سپس از گره ای که حداکثر 2 عضو به آن متصل است حل خرپا را شروع می کنیم بدین ترتیب که ابتدا جهت نیروها در اعضا بصورت کششی فرض می کنیم چنانچه این فرضمان بدست آمده برای عضو مثبت بود

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

مفهوم آن اینست که جهت فرضی صحیح است و چنانچه مقدار نیروی در عضو منفی بدست آمد مفهوم آن اینست عضو فشاری در نظر گرفته شود.

مثال: نیروهای کلیه اعضاء خرپای زیر را محاسبه کنید



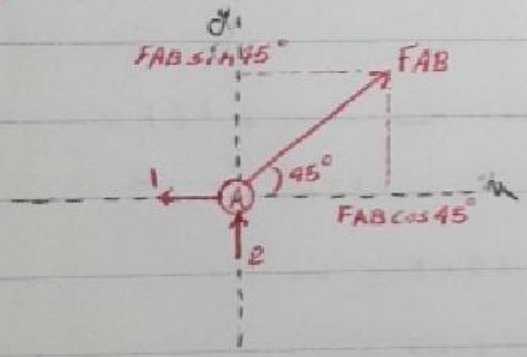
$\sum fx = 0 \rightsquigarrow Ax + 1 = 0 \rightsquigarrow Ax = -1$

$\sum MA = 0 \rightsquigarrow (1 \times 2) + (5 \times 2) = Cy \times 4$

$12 = 4Cy \rightsquigarrow Cy = 3t$

$\sum fy = 0 \rightsquigarrow Ay - 5 - 3 = 0 \rightsquigarrow Ay = 2$

گره A را بررسی کنیم



$\tan\alpha = \frac{2}{2} = 1$

$\sum fx = 0 \rightsquigarrow FAB\cos 45^\circ - 1 + FAC = 0$

$\sum fy = 0 \rightsquigarrow FAB \sin 45^\circ + 2 = 0$

$FAB \sin 45 = -2$

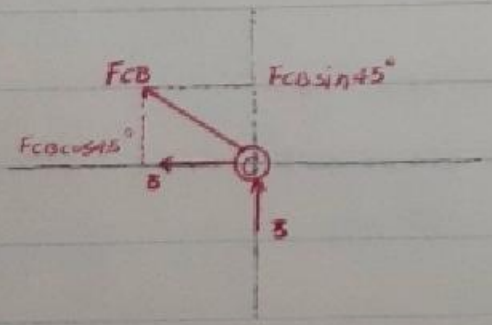
$FAB = \frac{-2}{\sin 45} = \frac{-2}{0.707} = -2.82\,C$ (فشاری)

$-2.82\cos 45^\circ - 1 + FAC = 0$

$FAC = (2.82\cos 45) + 1$

$FAC = 2.99 \simeq 3ton$ (کششی) T

گره C را بررسی کنیم



$\sum fy = 0 \rightsquigarrow FCB \sin 45 + 3 = 0$

$FCB \sin 45^\circ = -3$

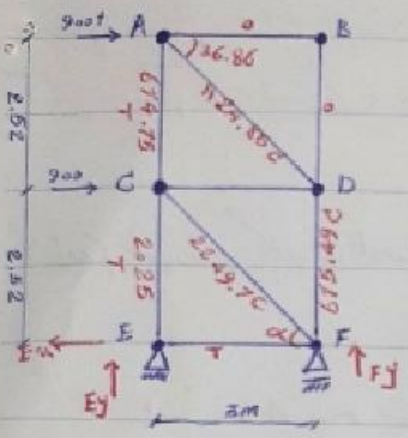
$FCB = \frac{-3}{\sin 45} = -4.24\,C$ فشاری

PDF Compressor Free Version

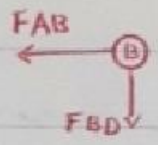
Date: / /

Subject:

مثال دوم ۲.



ابتدا گره B را «مقدار نیروی» میزنیم.



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -F_{AB} = 0 \rightarrow F_{AB} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -F_{BD} = 0 \rightarrow F_{BD} = 0$

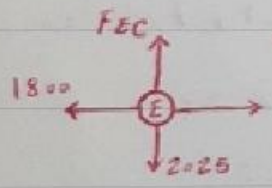
$tg\alpha = \frac{2.52}{3} \quad \alpha = tg^{-1}\left(\frac{2.52}{3}\right) = 36.86$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow 900 - 900 - E_x = 0 \qquad 1800 = E_x$

$\Sigma M_E = 0 \rightarrow (900 \times 2.25) + (900 \times 4.5) - 3F_y \qquad F_y = 2.25$

$\Sigma E_y + 2.25 = 0 \qquad \Sigma F_y \rightarrow E_y\ 2.25$

گره E را بازی میکنیم



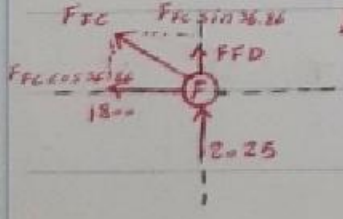
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -1800 + F_{EF} = 0$

$F_{EF} = 1800\ T$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -2.25 + F_{EC} = 0$

$F_{EC} = 2.25\ T$

گره F را بازی میکنیم



$\xrightarrow{+} \quad \Sigma F_x = 0 \rightarrow -1800 - F_{FC} \cos 36.86° = 0$

$-1800 = F_{FC} \cos 36.86 \rightarrow F_{FC} = \frac{-1800}{\cos 36.86} = -2249.7\ C$

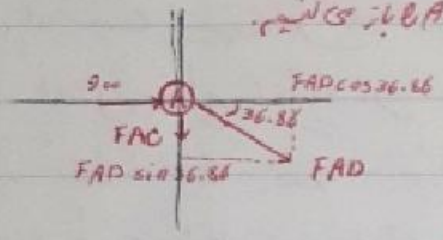
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 2.25 + F_{FC} \sin 36.86 + F_{FD} = 0$

$F_{FD} = (2249.7 \times \sin 36.86) - 2.25 = -675.4C$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

گره A را باز می کنیم.



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow 900 + FAD \cos 36.86 = 0$

$FAD \cos 36.86 = -900$

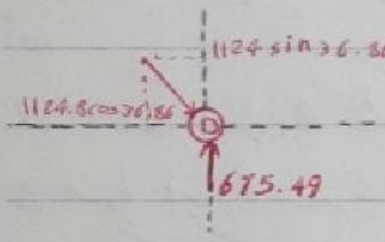
$FAD = \frac{-900}{\cos 36.86} = -1124.85 C$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -FAC + 1124.8 \sin 36.86 = 0$

$1124.8 \sin 36.86 = FAC$

$FAC = 674.75$

گره D را باز می کنیم.



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -FCD + (1124.85 \cdot \cos 36.86) = 0$

$(1124.85 \cdot \cos 36.86) = FCD \rightarrow 899 \cong 900\ T$

نکته: اعضای صفر نیرویی در خرپا:

۱ـ اگر یک مفصل فقط دو عضو بگذرد و زاویه بین ۲ عضو هر زاویه ای باشد به غیر از ۱۸۰° و بار هم روی مفصل نیز وجود نداشته باشد هر ۲ عضو صفر نیرویی هستند.

۲ـ اگر از یک مفصل ۳ عضو بگذرد بطوری که نیروی ۲ عضو آن در یک امتداد باشد و روی مفصل نیز بار وجود نداشته باشد عضو سوم بار هر زاویه صفر نیرویی است.

2. روش مقطع یا برش برای حل خرپا.

برای استفاده از این روش مراحل زیر را می توانیم انجام دهیم:

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

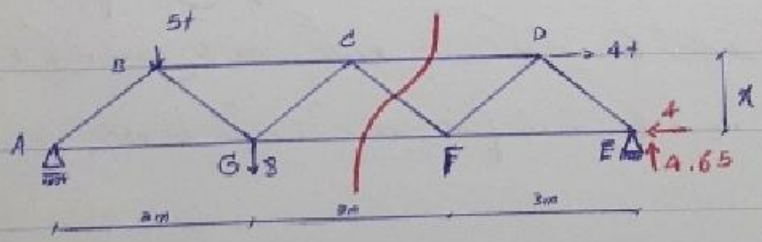
1. محاسبه ی نیروی اعضا تکیه گاهی (در صورت نیاز)
2. اعمال مقطع یا مقطع های مناسب
3. نوشتن اولیری دلخواه (گشتاری یا منشاری بودن اعضای قطع شده)
4. نوشتن معادلات تعادل برای یک سمت خرپا

در انتخاب مقطع مناسب باید به نکات زیر توجه کنیم.

1. انتخاب مقطع باید طوری باشد عضوی را که می خواهیم نیروی آنرا حساب می کنیم را حتما قطع کند.
2. اعضای کمتری را قطع کند.
3. خرپا باید به دو قسمت تبدیل شود
4. مقطعی که حداکثر 3 عضو را قطع کند و آن سه عضو از یک گره رد نشده باشد جواب می دهد.

مثال: نیروی عضو CF و CD را بدست آورید.

(طول هر عضو 3 متر - زاویه 60° می باشد)



$$\sum M_A = 0 \rightsquigarrow 4 + Ex = 0$$

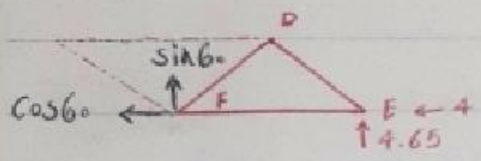
$$Ex = -4 \quad \leftarrow +$$

$$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow (5\times 1.5) + (8\times 3) + (4\times 2.55) = Ey \times 9 \rightsquigarrow Ey = 4.65$$

$$\star \sin(60) = \frac{x}{3} \rightsquigarrow x = 3 \times \sin(60) = 3\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.5\sqrt{3} = 2.55$$

PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:



$\Sigma fy = 0 \curvearrowright (F_{CF} \sin 60) + 4.65 = 0$

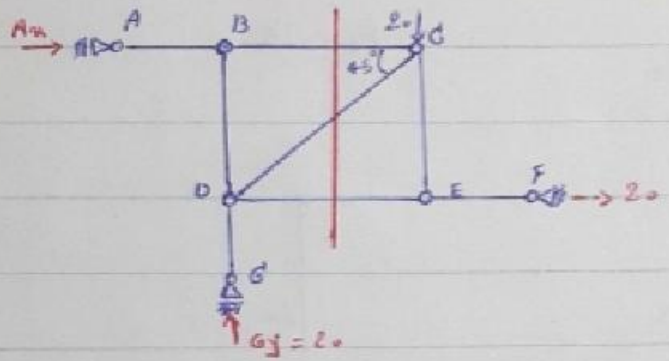
$(F_{CF}) \sin 60 = -4.65$

$F_{CF} = \frac{-4.65}{\sin 60} = -5.36\ t$

$\Sigma MF = 0 \curvearrowright (4 \times 2.55) = (4.65 \times 3) + (F_{CD} \times 2.55)$

$10.2 \quad 13.95$

$10.2 - 13.95 = 2.55\ F_{CD} \curvearrowright -1.47$

② 

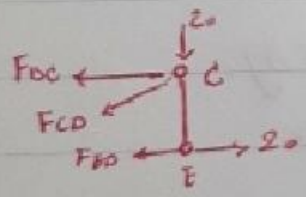
$F_{CD} = ?$

$\Sigma fy = 0 \curvearrowright -2 + Gy = 0$

$Gy = 2t$

$MA = 0 \curvearrowright (2 \times 4) = (Fx \times 2) + (2 \times 2)$

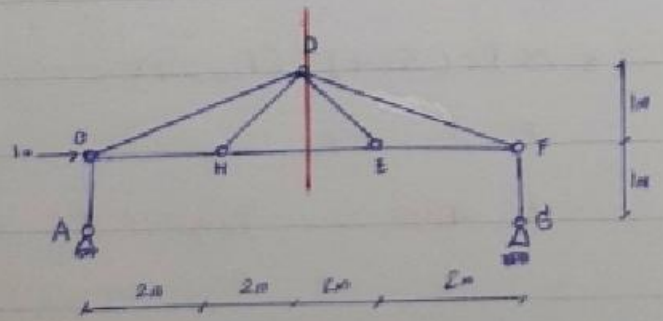
$4 = 2\ Fx \curvearrowright Fx = 2t$



$\Sigma fy = 0 \curvearrowright -2 - F_{CD} \sin 45 = 0$

$-2 = F_{CD} \sin 45$

$F_{CD} = \frac{-2}{\sin 45} = -2.828\ t$

③ 

$F_{HE} = ?$

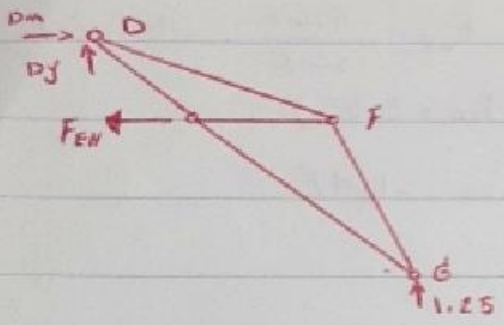
PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:

$\sum MA = 0 \curvearrowright (10 \times 1) = 6J \times 8$

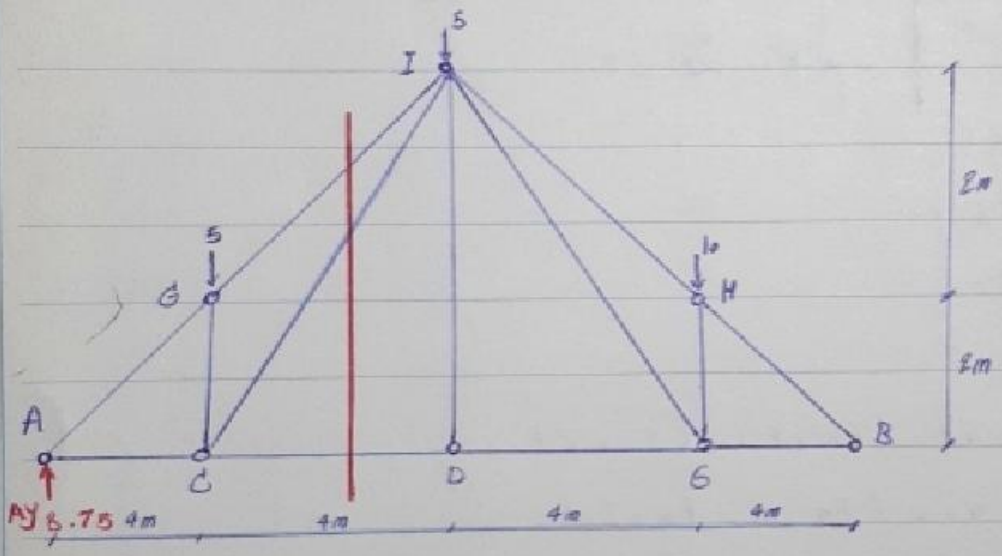
$10 = 8\,6J \rightsquigarrow 6J = \frac{10}{8} = 1.25\ t$



$\sum MD = 0$

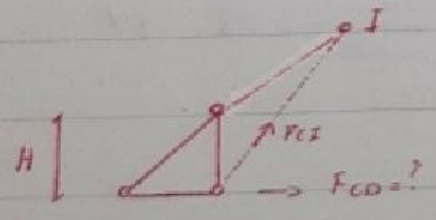
$(FEH \times 1) = 1.25 \times 4$

$FEH = 5$



$\sum MB = 0 \curvearrowright (AJ \times 16) = (5 \times 12) + (5 \times 8) + (1 \times 4)\ 16\,AJ =$

$60 + 40 + 40 \rightsquigarrow AJ = 8.75$



$\sum MI = 0$

$(8.75) \times (5 \times 4) + (FCD \times 4)$

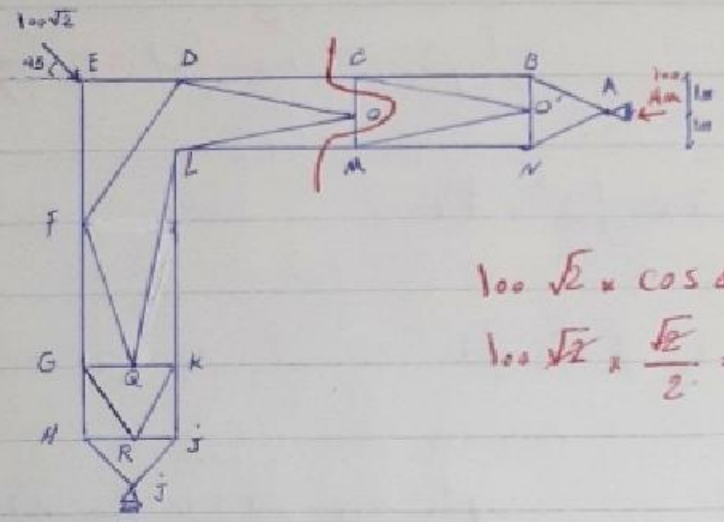
$70 = 20 + 4\,FCD$

$50 = 4FCD \qquad FCD = 12.2\ t$

PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:



FDC?

$100\sqrt{2} \times \cos 45 =$

$100\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 100$

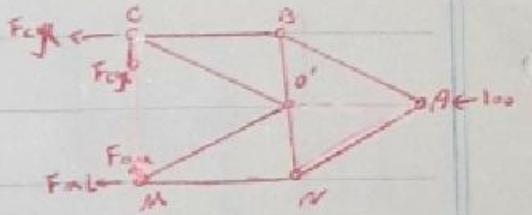
$\sum M_M = 0$

$F_{CD} \times 2 + (100 \times 1) = 0$

$2F_{CD} + 100 = 0$

$2F_{CD} = -100$

$F_{CD} = -(\frac{100}{2}) = -50t$ $\quad F_{CD} = -50 \, tonN$



- معان اینرسی (گشتاور دوم سطح - گشتاور لختی)

خواص سطوح:

۱. گشتاور اول سطح (سنتر اتیک) Q^{cm^4}.

گشتاور نسبت به محور x $\quad Q = A \times \bar{y}$

گشتاور نسبت به محور y $\quad Q = A \times \bar{x}$

۲. شعاع ژیراسیون r.

شعاع ژیراسیون نسبت به محور x $\quad r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

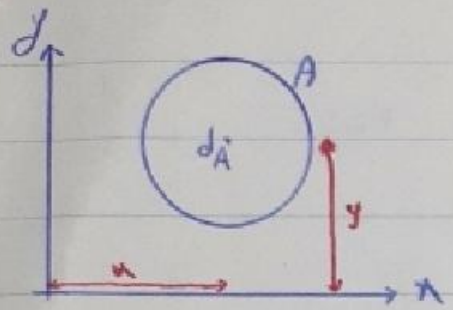
شعاع ژیراسیون نسبت به محور y $\quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:

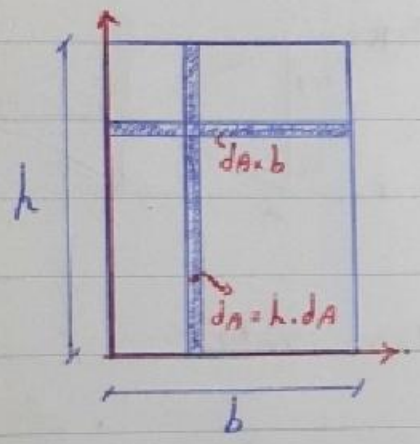
۳/ ممان اینرسی یا گشتاور دوم سطح.



$$I_x = \int y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int x^2 \cdot dA$$

اثبات ـ ممان اینرسی مستطیل:



الف) $I_x = ?$

ب) $I_y = ?$

الف) $I_x = \int y^2 \cdot dA$

$$= \int_0^h y^2 \cdot b\,dy$$

$$b\int_0^h \underbrace{y^2 \cdot dy}_{\frac{y^{2+1}}{2+1}} = \frac{b \cdot y^3}{3}\Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

* آن طولی که عمود بر محور مورد نظر می‌شود توان ۳ است.

ب) $I_y = \int x^2 \cdot dx = \int x^2 \cdot h \cdot dx$

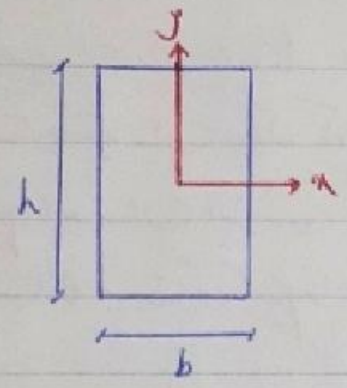
$$h\int_0^b x^2\,dx = \frac{h \cdot x^3}{3}\Big|_0^b \qquad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

PDF Compressor Free Version

Date: / /

Subject:

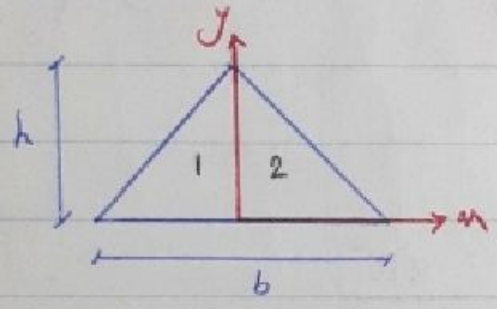
1 مستطیل



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

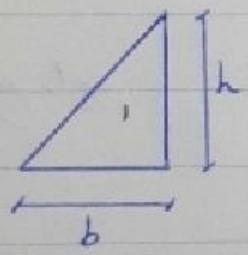
$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

2 مثلث



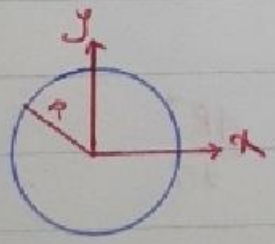
$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{48}$$



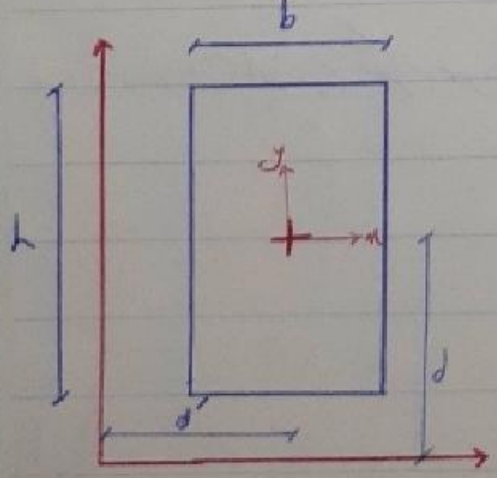
$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$$

3 دایره



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

نکته - قضیه محورهای موازی



مساحت شکل

$$I_x = I_{x_c} + A d^2$$

فاصله عمودی مرکز سطح تا محور مورد نظر

$$I_y = I_{y_c} + A d^2$$

فاصله افقی مرکز سطح شکل تا محور مورد نظر

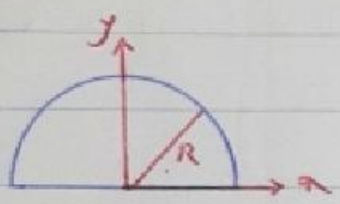
PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

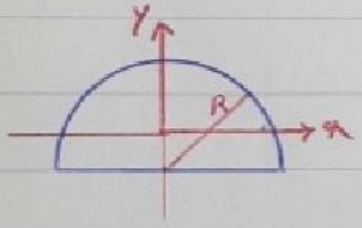
توضیح: (محورهای مختلف).

این قضیه بیان می‌کند که ممان اینرسی هر شکل نسبت به هر محور دلخواه خاصیتی محاسبه کنیم باید ممان اینرسی شکل نسبت به محوری که از مرکز سطح عبور می‌کند و معلوم باشد، است نسبت می‌آوریم و سپس به مقدار بدست آمده جمله Ad^2 را اضافه می‌کنیم.

4 نیم دایره

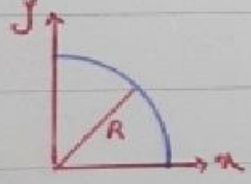


$$I_y = I_x = \frac{\pi R^4}{8}$$

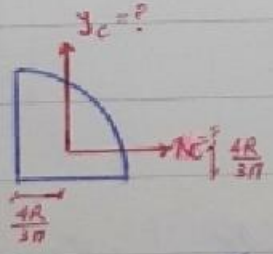


$$I_{xc} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{8R^4}{9\pi}$$

5 ربع دایره

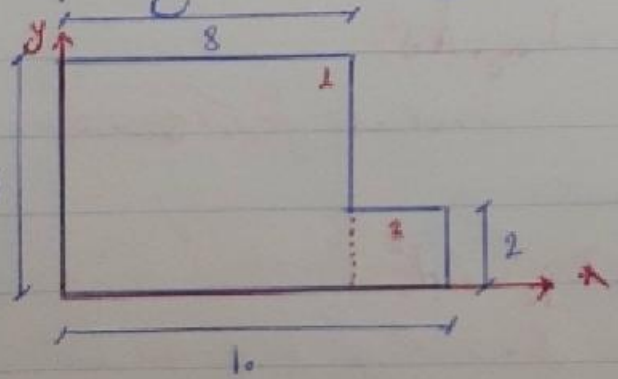


$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$$



$$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi}$$

تمرین: ممان اینرسی شکل زیر نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح محاسبه کنید



PDF Compressor Free Version

Date: / / Subject:

شکل	A	$\bar{x}$	$\bar{x}_i A$	$\bar{y}$	$\bar{y}_i A$
مستطیل 1	40	4	160	2.5	100
مربع 2	4	9	36	1	4
Σ	44	-	196	-	104

$\bar{x} = \frac{196}{44} = 4.45$

$\bar{y} = \frac{104}{44} = 2.36$

شکل	I_{xc}	A	D^2	AD	$I_{\bar{x}} = I_{xc} + Ad^2$
1	$\frac{8\times5^3}{12}$ 83.33	40	0.14	0.784	84.144
2	$\frac{2\times2^3}{12}$ 1.33	4	1.36	7.39	8.72

$y - \bar{y}$

92.864 cm^4

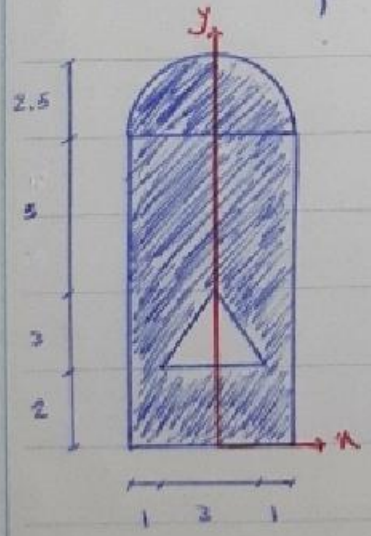
شکل	I_{yc}	A	D^2	AD	$I_{yc} = Ad^2 + A\bar{y}$
1	$\frac{5\times8^3}{12}$ 213.33	40	0.45	8.1	221.43
2	$\frac{2\times2^3}{12}$ 1.33	4	4.55	82.81	84.14

305.57 cm^4

تمرین. برای محاسبه‌ی ممان اینرسی قسمت‌های توخالی باید منفی در نظر بگیریم.

(جواب پایانی برای ممان اینرسی کل باید مثبت شود).

* شکل ثبت: محور x از شکل رد است.



شکل	A	$\bar{y}$	$A_i \bar{y}_i$
مستطیل توپر	50	5	250
نیم دایره توپر	$\frac{3.14\times2.5^2}{2}$ 9.81	11.06	108.49
مثلث توخالی	-4.5	3	-13.9
Σ	55.31	-	344.99

$\bar{y} = \frac{344.99}{55.31} = 6.23$

PDF Compressor Free Version

شکل	I_{nc}	A	D^2	AD	I
مستطیل قوس	$\frac{5\times10^3}{12}=416.66$	50	3.77	710.64	1127.30
نیم دایرہ قوس	$\frac{3.14(2.5)^4}{8}=15.33$	9.81	9.1	812.36	827.69
مثلث خلا	$\frac{3\times3^3}{12}=6.75$	-4.5	0.58	1.21	7.96
Σ					1968.95