شرح عمومی یک مدل برنامه ریزی خطی

مراحل حل مدل:

شرایط واقعی ← مدل ریاضی ← حل مدل ← نتایج ← آنالیز نتایج

فرآیند تبدیل شرایط به مدل های ریاضی را مدل سازی یا مدلینگ گویند.

$$Max(Min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$ objective Function

subject to (به شرط) $s.t.:$ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq = \geq b_1$ Restriction or Constraint (قیود)

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq = \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq = \geq b_m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,m \quad j = 1,2,\dots,n$$ Non Negativity (نامنفی)

x_j ; $j=1,2,\dots,n$: نشان دهنده متغیرهای اصلی یا اهداف اصلی سازمان که برای دستیابی به حداکثر سود یا حداقل هزینه می باشد.

c_j ; $j=1,2,\dots,n$: ضرایب سود (در صورتی که مدل Max باشد) یا هزینه (در صورتی که مدل Min باشد) برای هر متغیر مدل

a_{ij} : ضریب فنی، تکنولوژیکی، تجربه وری که نشان دهنده استفاده هر محصول از منابع تولید

می باشد (ضریب استفاده محصول j ام از منبع تولیدی i ام)

b_i ; $i=1,2,\dots,m$: بیانگر میزان موجودی منابع تولیدی یا همان محدودیت های موجود برای سیستم می باشد

مثال: یک کارخانه تولید کننده محصولات چوبی برای سازمان مدیریت و نوسازی مدارس ۳ نوع محصول تولید می نماید برای تولید این محصولات از ۲ نوع چوب راش و تبریزی (برحسب متر مربع) و نیروی انسانی (برحسب نفر ساعت) استفاده می کند مقدار مصرف هر محصول از منابع تولید به همراه حداکثر میزان منابع و سود پیش بینی شده پس از فروش محصول به شرح جدول زیر می باشد.

مدیر این کارخانه می خواهد بداند برای سال جاری در پیش رو از میان ۳ محصول کدام یک از هر چه میزان تولید نماید تا سودهای شرکت به حداکثر میزان ممکن افزایش یابد؟ مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی مدل سازی نماید

منابع / محصول	چوب راش	چوب تبریزی	نیروی انسانی	سود دهی واحد
میز	۵	۳	۸	۵
صندلی	۳	۲	۵	۳
تریبون	۷	۶	۱۲	۷
حداکثر میزان	۱۲۰	۱۵۰	۱۰,۰۰۰	

Subject: Date:

x_j تولید محصول jام $j=1,2,3$

x_1 تولید هر عدد میز $c_1=5$

x_2 " " صندلی $c_2=3$ → ضرایب سود

x_3 " " تختخواب $c_3=7$

(Max (سود ماکزیمم $\max z = \sum_{j=1}^{3} c_j x_j = 5x_1 + 3x_2 + 7x_3$

$s.t: \quad 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 1200$ محدودیت میزان تولید چوب تراش

$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150$ " " " تبریزی

$8x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 1000$ " " نیروی انسانی

متغیرها باید مثبت باشند چرا که می‌توانند صفر باشند $x_j \geq 0$ که در اینجا $j=1,2,3$

مثال) یک کارگاه تراشکاری سفارش ۴ محصول را برای تولید در دست دارد محصولات باید از ۳ ایستگاه کاری به طور پیوسته عبور نمایند تا تبدیل به محصول ساخته شده گردد زمان انجام عملیات برای هر محصول در هر ایستگاه کاری به شرح جدول زیر می‌باشد

x_j: تولید محصول jام $j=1,2,3,4$

x_1: تولید سفارش A $c_1=5$ → ضرایب سود

x_2: B " " $c_2=4$

x_3: C " " $c_3=3$

x_4: D " " $c_4=7$

محصول / کارگاه	تراشکاری	سنگ زنی	آبکاری	سوددهی
A	۲	۵	۲	۵
B	۴	۵	۱	۴
C	۳	۳	۲	۲
D	۵	۶	۴	۷
حداکثر زمان در دسترس	۷۰۰	۱۰۰۰	۹۰۰	

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4$$

$$S.t.\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 700$$
محدودیت زمان کارگاه تراشکاری

$$5x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 1000$$
محدودیت زمان کارگاه سنگ زنی

$$2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 900$$
محدودیت زمان آبکاری

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

مثال ۳) ۳ شرکت تعاونی کشاورزی مستقر در یک ناحیه کشاورزی تشکیل یک اتحادیه را می دهند مقدار زمین قابل کشت به همراه سهمیه آب در نظر گرفته شده برای هر شرکت تعاونی که به اندازه زمین بستگی دارد به شرح زیر می باشد. (هکتار)

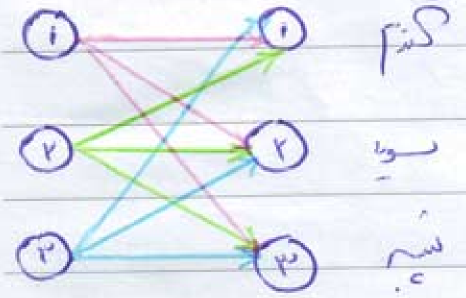
شرکت تعاونی	مقدار زمین	سهمیه آب
۱	۱۵۰	۲۰۰
۲	۵۰	۷۰۰
۳	۱۰۰	۱۲۰۰

محصولات گندم، سویا، پنبه تنها محصولاتی هستند که در این ناحیه کشاورزی کشت می شوند. به تجربه ثابت شده است که آب مورد نیاز برای هر محصول در واحد معین سطح با همدیگر تفاوت دارد. علاوه وزارت کشاورزی اجازه نمی دهد که بیش از سهمیه ای که به اتحادیه اعلام نموده است زمینی به کشت محصول اختصاص یابد. درصورتی که اطلاعات تکمیلی در این زمینه همراه سود حاصل از کاشت و برداشت محصولات مذکور

به شرح جدول زیر باشد دیگر اینکه هر سه شرکت توافق کرده اند که دقیقاً متناسب با اندازه زمین های خود، زمین به کشت محصول اختصاص دهند آنها می خواهند بدانند هر یک از شرکت های تعاونی چه میزان از زمین های خود را به کشت محصول اختصاص می دهند تا سود کلی آنها به حداکثر میزان ممکن افزایش یابد.

محصولات	آب مورد نیاز	سهمیه وزارت کشاورزی	سود (هکتار/هزار تومان)
گندم	۲	۷۰	۳
سویا	۴	۱۲۰	۷
پنبه	۳	۱۰	۵

x_{ij} مقدار زمینی که شرکت i ام به کشت محصول j ام $i=1,2,3$ $j=1,2,3$



$$\max z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}=3x_{11}+7x_{12}+5x_{13}+3x_{21}+7x_{22}+5x_{23}+3x_{31}+7x_{32}$$

$$5x_{33}$$

$$\text{s.t.}:\ x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 15$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 5$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 100$$

«محدودیت مربوط به زمین ها»

$$2x_{11}+4x_{12}+3x_{13}\leq 200$$
$$2x_{21}+4x_{22}+3x_{23}\leq 700$$
$$2x_{31}+4x_{32}+3x_{33}\leq 1200$$

محدودیت آب

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}\leq 70$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}\leq 130$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}\leq 100$$

محدودیت کشاورزی

* زمین‌ها به نسبت محصول ۱، ۲، ۳ را کشت می‌کنند

نسبت زمینی که دارند
$$\frac{x_{11}+x_{12}+x_{13}}{150}=\frac{x_{21}+x_{22}+x_{23}}{50}=\frac{x_{31}+x_{32}+x_{33}}{100}$$

محدودیت نسبت زمین برای هر مزرعه

$$50(x_{11}+x_{12}+x_{13})-150(x_{21}+x_{22}+x_{23})=0$$

$$100(x_{21}+x_{22}+x_{23})-50(x_{31}+x_{32}+x_{33})=0$$

$$x_{ij}\geq 0 \qquad i=1,2,3 \qquad j=1,2,3$$

مثال ۲) یک دامداری بزرگ قصد دارد مطابق یک روش برنامه‌ریزی شده برای دام‌های خود غذا تهیه نماید. مطابق نظر متخصصان هر وعده غذای دام باید شامل مقادیری از پروتئین، چربی و کربوهیدرات باشد. اگر درصد هر کدام از مواد آلی یاد شده به همراه قیمت خرید هر واحد از مواد غذایی مذکور به شرح جدول زیر باشد مدلی را ارائه نمایید که بر اساس آن مشخص گردد که این واحد دامداری

برای تأمین غذای دام های خود کدام یک و به چه میزان از مواد را خریداری نماید تا ضمن رعایت نظر دامپزشکان هزینه تهیه غذا به حداقل ممکن کاهش یابد مسأله را مدل سازی نمایید؟

مواد اولیه / مواد غذایی	پروتئین	چربی	کربوهیدرات	قیمت خرید واحد
A	۱۰	۱۷	۹	۱۲
B	۱۵	۱۲	۳	۲۰
C	۲۰	۱۴	۱۰	۱۵
حداقل میزان	۷۰	۲۰	۱۰۰	—
حداکثر میزان	—	۶۰	—	

x_j: خرید مواد غذایی j ام $j=1,2,3$

x_1: خرید ماده غذایی A $c_1=12$

x_2: خرید ماده غذایی B $c_2=20$

x_3: خرید ماده غذایی C $c_3=15$

$$\text{Min } Z=\sum_{j=1}^{3} c_j x_j = 12x_1+20x_2+15x_3$$

(c_j ها هزینه هستند min است)

$St: \; 10x_1+15x_2+20x_3 \geq 70$ محدودیت حداقل میزان پروتئین

حداکثر مقدار ممکن صفر است چون $\min \to -\infty$ و بی معنی است پس صفر [illegible] است

$60 \geq 17x_1+12x_2+14x_3 \geq 20$ محدودیت حداقل میزان چربی

$\downarrow$

$17x_1+12x_2+14x_3 \geq 20$ ؛ $17x_1+12x_2+14x_3 \leq 60$

$9x_1+3x_2+10x_3 \geq 100$ محدودیت حداقل میزان کربوهیدرات

$x_j \geq 0 \quad j=1,2,3$ محدودیت نامنفی بودن

این محدودیت برای تمام مدل ها ضروری است

Subject: Date:

* چون کارگران باید ۸ ساعت به طور پیوسته مشغول کار باشند پس

$St: x_1 + x_6 \geq 2$

درساعت ۴-۲۴ علاوه بر آن ۲ خدمتکار، خدمتکاران

$x_2 + x_1 \geq 4$

ساعت ۲۴-۲۰ هم هستند به همین دلیل ...

$x_3 + x_2 \geq 5$

$x_4 + x_3 \geq 10$

$x_5 + x_4 \geq 5$

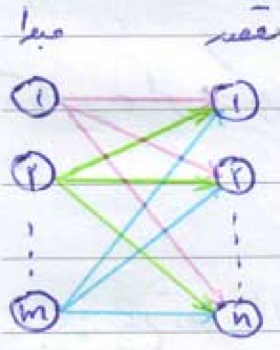
$x_6 + x_5 \geq 15$

$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 6$

مسأله های حمل و نقل : Trans Portation Problem

حمل و نقل همه min است چون همیشه هزینه است.

فرض کنید مسأله حمل و نقل :



$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, x_{ij}$$

تعداد مبدا — تعداد مقصد — هزینه

تعداد محدودیت ما $n+m$ است

$$St: \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$ Supply عرضه

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$ demand تقاضا

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

x_{ij}: عبارت است از تعداد کالای ارسالی از مبدا i ام به مقصد j ام

c_{ij}: هزینه حمل هر یک واحد کالا از مبدا i به مقصد j

S_i: یعنی مقدار کالای موجود در مرکز عرضه i ام مبدا Sorse

d_j: مقدار تقاضای مرکز j ام مقصد desination

نکته: در یک مدل حمل و نقل همیشه بایستی جمع عرضه و تقاضا با هم برابر باشند.

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

در غیر این صورت به یکی از ۲ طریق زیر عمل می کنیم

الف: جمع عرضه از تقاضا بیشتر باشد

$$\sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$$

در این حالت یک مرکز تقاضای مجازی (dummy) ایجاد کرده که هزینه های حمل کالا از کلیه مبادی به این مرکز مجازی صفر بوده ضمناً مقدار تقاضای این مرکز مجازی برابر است با

$$\left|\sum_{i=1}^{m} S_i - \sum_{j=1}^{n} d_j\right|$$

ب: جمع تقاضا از عرضه بیشتر باشد

$$\sum_{i=1}^{m} S_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$$

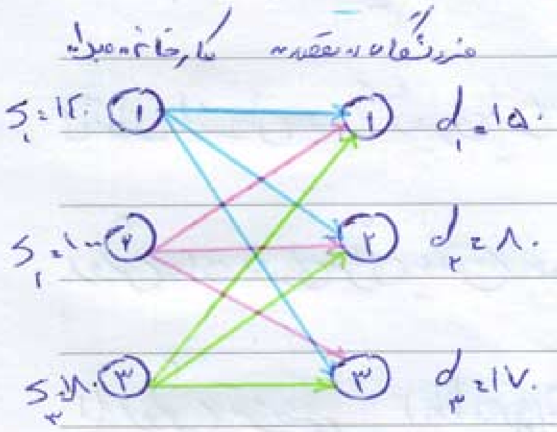
در این حالت یک مرکز عرضه مجازی به وجود آورده که هزینه های حمل کالا از این مرکز مجازی به کلیه مقاصد صفر بوده همچنین میزان عرضه این مرکز برابر است با

$$\left|\sum_{i=1}^{m} S_i - \sum_{j=1}^{n} d_j\right|$$

در یک مدل حمل و نقل تعداد متغیرها برابر با $m \times n$ و تعداد محدودیت ها $m+n$ می باشد.

EX: یک شرکت تولیدی محصولات تولیدی ۳ کارخانه خود را جهت مصرف به ۳ فروشگاه عمده حمل می نماید هزینه های حمل هر واحد کالا از هر کارخانه به هر فروشگاه به همراه مقادیر کالا در کارخانجات و تقاضا هر فروشگاه به شرح ذیل می باشد مدیر شرکت می خواهد این نکته را بداند که برای به حداقل رساندن هزینه حمل و نقل کالاهای تولیدی باید از کدام کارخانه به فروشگاه حمل شود مساله را مدل سازی کنید؟

۹ متغیر و ۶ محدودیت (۳ عرضه ۳ تقاضا)



کارخانه / فروشگاه	A	B	C	عرضه
۱	۲	۵	۲	۱۲۰
۲	۴	۶	۷	۱۰۰
۳	۲	۹	۶	۱۸۰
تقاضا	۱۵۰	۸۰	۱۷۰	۴۰۰ *

* حتما باید عرضه = تقاضا شد (چک کنید)

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=A}^{C} c_{ij}x_{ij} = 2x_{1A}+5x_{1B}+2x_{1C}+4x_{2A}+6x_{2B}+7x_{2C}+2x_{3A}+9x_{3B}+6x_{3C}$$

$$S.t.: \; x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}=120$$

تعداد محدودیت های عرضه

$$x_{2A}+x_{2B}+x_{2C}=100$$

$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}=180$$

*

$$x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}=150$$

$$x_{1B}+x_{2B}+x_{3B}=80$$ محدودیت های تقاضا

$$x_{1C}+x_{2C}+x_{3C}=170$$ * علامت تساوی یعنی این است

$$x_{ij}\geq 0 \qquad i=1,2,3 \qquad j=A,B,C$$

راه حل های پیدا کردن جواب های بهینه برای یک مدل برنامه ریزی خطی

علاوه بر روش های ریاضی موجود که همگی آنها در تناسب بین محدودیت ها و متغیرها، محدودیت دارد می توان از روش های دیگری نیز استفاده نمود تا بهترین جواب ها را بدست آورد.

روش های عمومی برای یافتن جواب های بهینه به ۲ روش کلی زیر خلاصه می شوند

۱) روش ترسیمی (grafh)

۲) روش Symplex - سیمپلکس ساده

روش ترسیمی :

فرآیند این روش برای حل یک مدل برنامه ریزی خطی ۲ متغیره به شرح زیر می باشد

۱) ابتدا محدودیت های مدل را که به فرم نامعادله باشند به معادله تبدیل و نقاط تشکیل دهنده هر محدودیت را بر

روی محورهای مختصات پیدا کنید.

۲) تعیین فضای جواب هر محدودیت: پس از رسم معادله خط هر محدودیت فضای جواب آن به صورت زیر تعیین می‌شود.

* اگر محدودیت به فرم نامعادله ≥ باشد فضای جواب به سمت مبدأ مختصات در صورتی که محدودیت به فرم نامعادله ≤ باشد فضای جواب به سمت خارج مبدأ مختصات می‌باشد *

* در نهایت اگر محدودیت معادله باشد فضای جواب دقیقاً بر روی خود خط قرار می‌گیرد *

(منطقه جواب) Feasible Region

فضای جواب مشترک common : پس از رسم معادلات خط تمام محدودیت‌ها فضای جواب مشترک بین تمامی آنها را (در صورت وجود) به گونه‌ای مشخص می‌نماییم که هیچ یک از نقاط تشکیل دهنده آن فضا هیچ کدام از محدودیت‌ها را نقض نکنند.

تعیین نقاط گوشه‌ای extreme points (گوشه‌ای، رأسی، نقاط مرزی)

پس از مشخص شدن فضای جواب مشترک نقاط گوشه‌ای فضای جواب را که محل تقاطع ۲ محدودیت با یکدیگر یا برخورد یک محدودیت با یکی از محورهای مختصات می‌باشد را مشخص نموده، مختصات هر یک از آنها را بدست می‌آوریم.

جواب های بهینه (optimal Solution)

برای بدست آوردن جوابهای بهینه مختصات هر یک از نقاط گوشه‌ای را در تابع هدف قرار داده در صورتیکه مدل max باشد نقطه‌ای بهترین جواب است که بیشترین مقدار عددی (بیشترین مقدار سود) و اگر مدل min باشد نقطه‌ای بهترین جواب است که کمترین مقدار عددی (یعنی کمترین میزان هزینه) نصیب تابع هدف سازد

مثال) مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را با استفاده از روش ترسیمی حل نمایید:

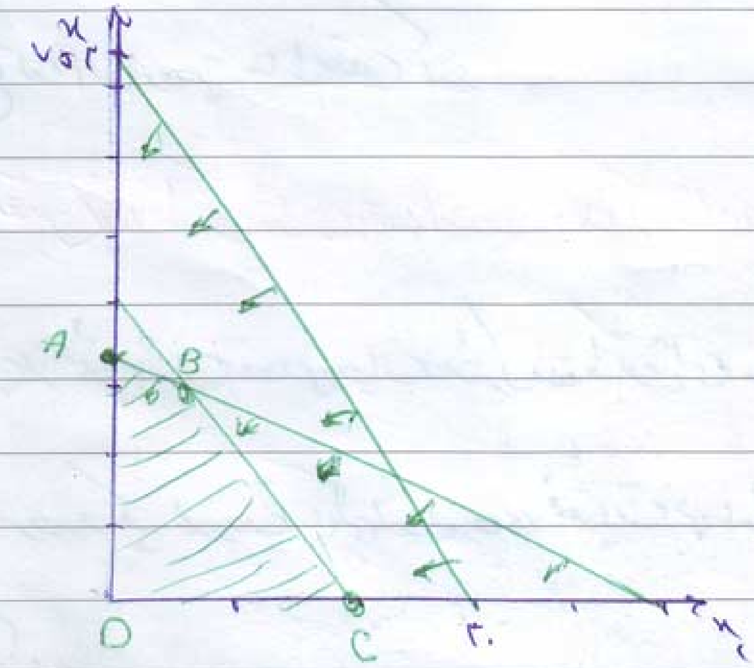
$\max Z = 12x_1 + 8x_2$

St: (1 برش) $5x_1 + 2x_2 \leq 150$ | $x_1 = 30$, $x_2 = 75$

(2 تمیزی) $2x_1 + 3x_2 \leq 100$ | $x_1 = 50$, $x_2 = 33.3$

(3 نیروی انسانی) $4x_1 + 2x_2 \leq 80$ | $x_1 = 20$, $x_2 = 40$

$x_1, x_2 \geq 0$



$5(5) + 2(30) = 85$

$2(5) + 3(30) = 100$

$4(5) + 2(30) = 80$

A $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 33.3 \end{cases}$ $Z_A = 12(0) + 8(33.3) \Rightarrow \boxed{Z_A = 266.4}$

D $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $Z_D = 12(0) + 8(0) \Rightarrow \boxed{Z_D = 0}$

C $\begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $Z_C = 12(20) + 8(0) \Rightarrow \boxed{Z_C = 240}$

$-2\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 100 \\ 4x_1 + 2x_2 = 80 \end{cases}$ $-4x_2 = -120$

$x_2 = 30$

$x_1 = 5$

B $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 30 \end{cases}$ $Z_B = 12(5) + 8(30) \Rightarrow \boxed{Z_B = 300}$

$\boxed{x_1^* = 5 \quad x_2^* = 30 \quad Z^* = 300}$

$\max Z = 3x_1 - 6x_2$

$\text{St.} \quad 3x_1 + 3x_2 \geq 18$ $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

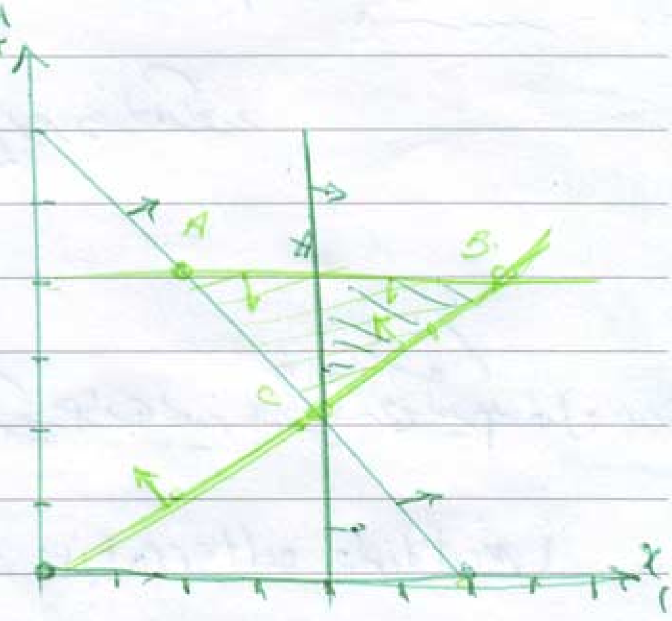
$x_1 - 2x_2 \leq 0$

$x_1 \geq 4$

$x_2 \leq 4$

$x_1 = 2x_2$

x_2	1	2	3
x_1	2	4	6



A | $x_1=4$, $x_2=4$ $\quad Z_A = 3(4) - 6(4) \Rightarrow \boxed{Z_A = -12}$

B | $x_1=8$, $x_2=4$ $\quad Z_B = 3(8) - 6(4) \Rightarrow \boxed{Z_B = 0}$

C | $x_1=4$, $x_2=2$ $\quad Z_C = 3(4) - 6(2) \Rightarrow \boxed{Z_C = 0}$

$C^3_2 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$

$(1,2)$

$(1,3)$

$(2,3)$

$\boxed{x_1=4,\ x_2=2,\ Z=0}$ $\quad$ $\boxed{x_1=8,\ x_2=4,\ Z=0}$

تباهیدگی است چون از تقاطع بیش از ۲ معادله یعنی ۳ معادله بوجود آمده

حالت خاص تباهیدگی degeneration:

اگر در حل یک مدل برنامه‌ریزی خطی به وسیله روش ترسیمی یکی از نقاط گوشه‌ای فضای جواب از تقاطع بیش از ۲ معادله حدی تشکیل گردد، اصطلاحاً گوییم که مدل دارای حالت خاص تباهیدگی می‌باشد. تباهیدگی در روش ترسیمی باعث بروز هیچ مشکلی نمی‌گردد ولی در الگوریتم سیمپلکس همانطور که بعداً گفته خواهد شد در راه رسیدن به جواب بهینه تأخیر بوجود خواهد آورد.

حالت خاص جوابهای بهینه چندگانه:

هنگامی که یک مدل برنامه‌ریزی خطی دارای بیش از یک جواب بهینه باشد نتیجه می‌گیریم که مدل دارای حالت خاص جوابهای بهینه چندگانه می‌باشد (multiple alternative solution)

Subject: Date:

* در حالت خاص جوابهای بهینه چندگانه مقدار تابع هدف برای جوابهای متعدد یکسان می باشد

در این حالت خاص حتی می توان قبل از حل مدل تشخیص داد که آیا جوابهای چندگانه وجود دارد

اگر تابع هدف موازی با موازی یکی از محدودیت های مدل باشد بدون حل می توان نتیجه گیری

کرد که حالت خاص چندگانه وجود دارد.

حالت خاص ۳:

(فضای جواب بیکران، جواب بهینه کران دار یا محدود):

این حالت خاص هنگامی رخ می دهد که یک فضای جواب مشترک محدود بین تمامی محدودیت های

مدل وجود نداشته باشد ولی اگر این مدل دارای جواب بهینه باشد این حالت خاص رخ می دهد

(فضای جواب نامحدود، جواب بهینه نامحدود):

اگر یک فضای جواب مشترک محدود برای محدودیت های مدل وجود نداشته باشد همچنین یک

جواب بهینه مشخص نتوانیم برای مدل پیدا کنیم این حالت خاص رخ می دهد

الگوریتم سیمپلکس:

یک روش حلی که دارای محدودیت در مقدار متغیرها و محدودیت های یک مدل وجود داشته باشد دیگر از جوابهای

بهینه را مشخص کند روش سیمپلکس می باشد

روش متعارف یا استاندارد کردن مدل

برای استفاده از روش سیمپلکس باید شرایطی را در مدل بوجود آوریم که اصطلاحاً به آن شرایط

متعارف کردن یا استاندارد کردن می گوییم

این شرایط سه گانه بوده و به شرح زیر می باشد باید در مدل خطی ایجاد گردد تا قابلیت حل مدل با روش سیمپلکس

میسر گردد

۱) تابع هدف باید به صورت max باشد در غیر این صورت اگر مدل min باشد با ضرب تابع هدف

در (۱-) تابع min ← max تبدیل می یابیم

۲) مقادیر ثابت سمت راست محدودیت ها (b_i) باید اجباری + باشد در غیر این صورت با ضرب محدودیت

در (۱-) مقدار - ← + تبدیل می یابیم. البته این است اگر محدودیت به فرم نامعادله باشد جهت نامعادله تغییر می یابد

۳) هر محدودیت مدل که به صورت نامعادله باشد باید به فرم معادله تبدیل شود * برای این منظور در نامعادلات

کوچکتر مساوی

$\leq$ از متغیری به نام متغیر کمکی کمبود (slack variable) ($+S_i$) و در محدودیت های که به صورت نامعادله

بزرگتر مساوی

$\geq$ . . . . . . از متغیر مازاد (surplus variable) ($-S_i$) استفاده می شود

۴) هر محدودیت باید دارای یک متغیر ایزوله باشد. متغیر ایزوله دارای ۲ شرط است ① ضریب آن در محدودیت مورد نظر ۱ باشد ② ضریب آن در تابع هدف و محدودیت های دیگر ۰ می باشد به عبارتی بهتر در جاهای دیگر ظاهر نشده باشد. در محدودیت هایی که به فرم نامعادله کوچکتر مساوی ($\leq$) می باشند خود متغیر کمکی کمبود نقش متغیر ایزوله را نیز بازی می کند ولی در نامعادلات بزرگتر ($\geq$) مساوی یا معادلات باید از متغیری به نام متغیر مصنوعی (R_i) (Artificial Variable) استفاده شود

۵) تمامی متغیرهای اصلی مدل باید دارای مقدار مثبت باشند در غیر این صورت به کارگیری روش های ریاضی این متغیرها را به سمت مقدار مثبت میل می دهیم (تبدیل می نماییم)

مثال) مدل برنامه ریزی خطی زیر را به فرم استاندارد تبدیل کنید؟

$$\max z = 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max z - 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$$

$$\text{St: } 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20 \rightarrow 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_1 = 20$$

ایزوله هستند

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 25 \rightarrow x_1 - 2x_2 + 5x_3 + S_2 = 25$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 10 \rightarrow 2x_1 + x_2 - 3x_3 - S_3 + R_1 = 10$$

ایزوله نیست چون ضریبش (-1)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \rightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 + R_2 = 7$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3 \rightarrow x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3$$

* در صورتی که تابع هدف max و همه ی محدودیت های مدل به فرم نامعادله $\leq$ باشد شرایط متعارف کردن برقرار می شود. در صورت عدم وجود هر یک از ۲ شرایط مذکور شرایط استاندارد کردن برقرار می شود.

در هر معادله $\leq$ Sها ایزوله در معادله $\geq$ و $=$ Rها ایزوله هستند

مثال) مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را به فرم استاندارد تبدیل نمایید:

برای تبدیل min ← max : X(-1)

$\min z = 2x_1 - x_2 - 3x_3$

$s.t.:\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 10$

$-3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq -15$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \leq 0$

x_3 آزاد در علامت

$\max(-z) = -2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max(-z) + 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 + S = 10$ ○ اضافه

$\times(-1)$

$+3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 15 \rightarrow 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - S + R_1 = 15$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + R_2 = 5$

$x_1 \geq 0$

خودمان اندیس می‌گذاریم

$-x_2 \geq 0 \rightarrow -x_2 = x_4 \rightarrow x_2 = -x_4 \Rightarrow x_4 \geq 0$

$x_3 = x_5^{+} - x_6^{-} \Rightarrow x_3 \geq 0$

$$\max(-z) + 2x_1 + x_4 - 3x_5 + 3x_6 = 0$$

$$\begin{aligned} St:\ & 2x_1 - x_4 + 4x_5 - 4x_6 + S_1 = 10 \\ & 3x_1 + 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 - S_2 + R_1 = 15 \\ & x_1 - 2x_4 + x_5 - x_6 + R_2 = 5 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

الگوریتم سیمپلکس : Simplex

پس از متعارف یا استاندارد کردن مدل الگو می توان با استفاده از الگوریتم زیر جواب های بهینه یک مدل برنامه ریزی خطی را بدست آورد.

۱) تشکیل اولین تابلو جدول سیمپلکس : (initial tableaue)

در این تابلو و در ستون اول آن که به نام ستون متغیرهای پایه Basic Variable (BV) نامیده می شود متغیرهای ای که هر محدودیت به ترتیب در این ستون قرار می گیرد به عبارت دیگر تعداد متغیرهای این ستون با تعداد محدودیت ها برابر است. در سطر افقی تابلو ابتدا به ترتیب متغیرهای اصلی (x_j) سپس متغیرهای کمکی کمبود و مازاد ($\pm S_i$) و در نهایت متغیرهای مصنوعی (R_i) قرار می گیرد (ϵb_i)

در ستون آخر تابلو مقادیر ثابت سمت راست محدودیت ها نوشته می شود Current Value (CV)

ارزش فعلی جاری است Right hand Side سمت راست معادله (R.H.S)

و در سطر زیرین تابلو مقادیر متعارف شده سطر تابع هدف (C_j) Z قرار می گیرد.

۲) تعیین متغیر ورودی: Entering

برای تعیین این متغیر در صورتی که مدل Max باشد از میان ضرایب منفی سطر تابع هدف منفی ترین را انتخاب نموده، متغیر متناظر آن کاندید ورود به پایه می شوند
در صورتی که مدل min باشد مثبت ترین ضریب یا عدد نشان دهنده متغیر ورودی می باشد

* نکته: اگر در تعیین متغیر ورودی بیش از یک متغیر همزمان کاندیدای ورود به پایه باشند انتخاب هر یک به دلخواه بلامانع است.

۳) تعیین متغیر خروجی: leaving

برای ... ابتدا بردار ستونی متغیر ورودی را مشخص کرده سپس ضرایب ثابت سمت راست (C.V) بر ضرایب مثبت ستون متغیر ورودی تقسیم، min حاصل تقسیم ها نشان دهنده متغیر خروجی می باشد.

$$\min\left\{\frac{C.V}{a_{ij}}\right\} \quad \forall\, a_{ij}>0 \text{ فقط}$$

* نکته: اگر تمامی ضرایب ستون متغیر ورودی غیر مثبت باشد (همگی صفر یا منفی) نتیجه می گیریم مدل دارای جوابی بهینه نمی باشد.

* نکته ۲: اگر در تعیین متغیر خروجی بیش از یک متغیر به طور همزمان کاندیدای خروج از پایه باشند (حالت خاص تباهیدگی) به جهت جلوگیری از مشکل احتمالی (loop) جلسه ۵۲ باید از قوانین خاص

از روش‌های حلقه استفاده نماییم که می‌توان از یکی از ۲ قاعده زیر استفاده نماییم:

قاعده اول: لکسیکو گراف (Lexico graph)

قاعده دوم: پرتوربیشن (Portor bution)

4) تشکیل جدول جدید سیمپلکس:

پس از تعیین متغیر ورودی و خروجی باید جدول بروز شده Simplex را تشکیل دهیم؛ به عبارت بهتر ما ترتیب متغیرهای پایه جدید باید تهیه گردد برای این منظور ابتدا عدد لولا یا پیشگرد (Pivot) را که عنصر مشترک بردار ستونی متغیر ورودی در بردار سطری متغیر خروجی می‌باشد را مشخص نموده پس با عملیات زیر جدول جدید را تشکیل می‌دهیم

$$\boxed{\text{سطر متغیر ورودی جدید} = \frac{\text{سطر متغیر خروجی}}{\text{عدد لولا}}}$$

سطر جدید متغیر مربوطه = (قرینه عددی که باید صفر شود) × (سطر متغیر ورودی جدید) + (سطر قدیم متغیری که مقدار آن باید صفر شود)

5) جواب‌های بهینه: (optimal solution)

مدلی که با Simplex حل می‌گردد هنگامی به جواب‌های بهینه می‌رسد که تمامی ضرایب متغیرهای غیرپایه در سطر تابع هدف (Z) مثبت شده باشد (در صورتی که مدل max باشد) و اگر مدل min

Subject: Date:

باشد هنگامی به جواب های بهینه می رسیم که ضرایب متغیرهای غیر پایه آن در سطر z منفی شده باشد

در غیر این صورت (شرایط بهینه نشده باشد) به مرحله ۲ (متغیرهای ورودی) باز می گردد.

EX: مدل برنامه ریزی خطی زیر را با استفاده از الگوریتم Simplex حل کنید؟

$\max Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

St: $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$

$3x_1 + 2x_3 \le 460$

$x_1 + 4x_2 \le 420$

$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3$

اول استاندارد و متعارف می کنیم ← اینجا متعارف می کنیم چون Max و همه ≤ است

حل: $\max Z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$

ورودی

St: $x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 430$

$3x_1 + 2x_3 + S_2 = 460$

$x_1 + 4x_2 + S_3 = 420$

$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3$

* S_1 جدید

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	CV
قرینه عددی که باید صفر شود : $(-1)\times$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_1 قدیم +	1	2	1	1	0	0	430
S_1 جدید	$-\frac{1}{2}$	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	200

* Z جدید

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	CV
$\times 5$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
Z قدیم +	-3	-2	-5	0	0	0	0
Z جدید	$\frac{9}{2}$	-2	0	0	$\frac{5}{2}$	0	1150

Subject: Date:

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	C.V
S_1	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۴۳۰
S_2	۳	۰	۲*	۰	۱	۰	۴۶۰
S_3	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۴۲۰
* Z	-۳	-۲	-۵	۰	۰	۰	۰
* S_1	$-\frac{1}{2}$	۲*	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۰	۲۰۰
x_3	$\frac{3}{2}$	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۲۳۰
S_3	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۴۲۰
Z	$\frac{9}{2}$	-۲	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۰	۱۱۵۰
x_2	$-\frac{1}{4}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۰	۱۰۰
x_3	$\frac{3}{2}$	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۲۳۰
S_3	۲	۰	۰	-۲	۱	۱	۲۰
Z	۴	۰	۰	۱	۲	۰	۱۳۵۰ *

B.V: متغیر اساسی یا پایه

اصلی سمت چپ

مکمل سمت راست

متغیر اصلی (x_1, x_2, x_3)

متغیر کمبود (S_1, S_2, S_3)

بعد از مشخص شدن پیوت کوچکترین را
-۱۰۰ min

۱۰۵

* چون در Z ها عدد منفی نداریم پس شرایط بهینه است
و چون در ستون علت
حیث Z و Z نداریم ۲۰ کالا
مصرف شده و تنها ۲۰ تا از
S_3 باقی مانده

هر واحد S_2 اضافه ← Z ۲ برابر می‌شود هر واحد اضافه شده Z ۲ برابر ها

S_3 هر واحد اضافه فرقی ندارد
تغییر نمی‌کند

$$Min\left\{\frac{C.V}{a_{ij}}\right\} = Min\left\{\frac{430}{1}, \frac{460}{2}\right\} = 230$$

$\forall a_{ij} > 0$

(۲)

در جدول جدید x_1 و x_2 وجود ندارد و فقط x_3 است که ۲۳۰ است

$x_1 = 0$ ۳(۰) + ۲(۰) + ۵(۲۳۰) = ۱۱۵۰ — S_1 ۲۰ تا باقی مانده

$x_2 = 0$ ۱(۰) + ۲(۰) + ۱(۲۳۰) = ۲۳۰ — S_2 کاملا مصرف شده

$x_3 = 230$ ۳(۰) + ۰(۰) + ۲(۲۳۰) = ۴۶۰ — ۱۱۵۰ سود

۱(۰) + ۴(۰) + ۰(۲۳۰) = ۰ — S_3 هیچ مصرف نشده

Pilavaran

۱۲۳

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	CV
$-4\times$	$-\frac{1}{4}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۰	۱۰۰
S_3 قدیم	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۴۲۰
S_3 جدید	۲	۰	۰	۲-	۱	۱	۲۰

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	CV
$\times 2$	$-\frac{1}{4}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۰	۱۰۰
$+Z$ قدیم	$\frac{9}{2}$	۲-	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۰	۱۱۵۰
Z جدید	۴	۰	۰	۱	۲	۰	۱۳۵۰

جدول (۳) $x_1 = 0$ $x_2 = 100$ $x_3 = 230$

۱(۰) + ۲(۱۰۰) + ۱(۲۳۰) = ۴۳۰ → S_1 مصرف

۳(۰) + ۰(۱۰۰) + ۲(۲۳۰) = ۴۶۰ → S_2 مصرف

۱(۰) + ۴(۱۰۰) + ۰(۲۳۰) = ۴۰۰ → S_3 اضافه دارد.

۳(۰) + ۲(۱۰۰) + ۵(۲۳۰) = ۱۳۵۰ سود کل

Subject: Date:

تفسیر قیمت های سایه ای Shadow Price

ضرایب متغیرهای پایه جدول اول یا به عبارت دیگر ضرایب متغیرهای کمکی کمبود در سطر تابع هدف جدول بهینه را اصطلاحاً قیمت یا قیمت سایه ای می نامند. این ضرایب بدین معنی می باشند که در صورت هر یک واحد افزایش در موجودی منابع تولید، میزان قیمت سایه ای مورد انتظار اصول مبانی اضافه می شود با توجه به اینکه مدل از یک فرآیند خطی تبعیت می کند این تفسیر در مورد کاهش منابع تولید و به دنبال آن کاهش سود برای مدل می تواند به کار رود از آنجایی که متغیرهای کمکی کمبود دارای تفاسیر اقتصادی می باشند متغیرهای مصنوعی چنین تفاسیری را ایجاد نمی کند این گونه متغیرها صرفاً یک حیله یا کلک ریاضی برای متعارف کردن مدل به شمار می رود و ارزش محاسباتی در جدول Simplex ندارد. این گونه متغیرها باید سریعاً از جدول حذف شود برای حذف متغیرهای مصنوعی از یک مدل برنامه ریزی خطی می توان از یکی از ۲ روش زیر استفاده کرد

1. روش M بزرگ یا روش جریمه big M method

2. روش فاز 1 و فاز 2

روش M بزرگ

خلاصه فرآیند این روش برای حل یک مدل برنامه ریزی خطی و حذف متغیرهای مصنوعی از مدل به شرح زیر می باشد

Subject: Date:

1) ابتدا محدودیت های مدل را بدون در نظر گرفتن تابع هدف به فرم استاندارد تبدیل کنید.

2) متغیرهای مصنوعی محدودیت را شمارش نموده به ازای هر متغیر مصنوعی و در صورتی که مدل max باشد یک ضریب $(-M)$ و در صورتی که مدل Min باشد ضریب $(+M)$ در متغیرهای مصنوعی ضرب و به تابع هدف اضافه نمایید. ← max ← $x(-M)$ min ← $x(+M)$

3) تابع هدف را به صورت معادله مساوی صفر تبدیل نموده و اولین تابلو Simplex را تشکیل دهید. این تابلو موجه نمی باشد زیرا برای متغیرهای مصنوعی پایه به جای مقدار صفر در سطر تابع هدف مقدار $+M$ در مدل max و $-M$ در مدل Min وجود دارد. این ضرایب به صفر تبدیل شود تا جدول به حالت موجه تبدیل شوند.

4) تعیین متغیر ورودی، تعیین متغیر خروجی، تشکیل جدول جدید Simplex و شرایط بهینگی مدل همانند دستورالعمل گفته شده در الگوریتم Simplex می باشد.

نکته 1) هنگامی که آخرین متغیر مصنوعی از پایه جدول خارج گردد تمامی ضرایب M باید از سطر تابع هدف جدول حذف شود در غیر این صورت مدل دارای جواب نمی باشد.

نکته 2) اگر مدل به شرایط بهینگی دست یابد ولی حداقل یک متغیر مصنوعی با ارزش مثبت در پایه باقی مانده باشد

نتیجه می‌گیریم که مدل دارای جواب بهینه نمی‌باشد

مثال) مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را با استفاده از روش M بزرگ حل کنید؟

$\min Z = 20x_1 + 15x_2$

St: $2x_1 + x_2 \geq 5 \rightarrow 2x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 5$

$-3x_1 + 2x_2 \leq 3 \rightarrow -3x_1 + 2x_2 + S_2 = 3 \Rightarrow \min Z = 20x_1 + 15x_2 + MR_1 + MR_2$

$x_1 + x_2 \geq 3 \rightarrow x_1 + x_2 - S_3 + R_2 = 3$

$x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow \min Z - 20x_1 - 15x_2 - MR_1 - MR_2 = 0$

B.V	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	C.V	
R_1	$\boxed{2}$	1	-1	0	0	1	0	5	
S_2	-3	2	0	1	0	0	0	3	
R_2	$\boxed{1}$	1	0	0	-1	0	1	3	
ناصحیح ← Z	-20	-15	0	0	0	-M	-M	0	
R_1	*2	1	-1	0	0	1	0	5	$\frac{5}{2}$ min
S_2	-3	2	0	1	0	0	0	3	
R_2	1	1	0	0	-1	0	1	3	$\frac{3}{1}$
صحیح ← Z	-20+3M	-15+2M	-M	0	-M	0	0	8M	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	؟ چون R_1 حذف شد	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \div \frac{1}{2} = 5$
S_2	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	؟	0	$\frac{21}{2}$	→ ۳
R_2	0	*$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	؟	1	$\frac{1}{2}$	→ ۱ min
Z	0	$-5+\frac{1}{2}M$	$-10+\frac{1}{2}M$	0	-M	؟	0	$50+\frac{1}{2}M$	
x_1	1	0	-1	0	1	؟	؟	2	
S_2	0	0	-5	1	7	؟	؟	7	
x_2	0	1	1	0	-2	؟	؟	1	
Z	0	0	-5	0	-10	؟	؟	55	

چون تمام R_1 و R_2 حذف شده نیازی نداریم

چون مدل Min و تمام عددها منفی شده پس مدل بهینه است

$x_1^* = 2 \qquad x_2^* = 1 \qquad Z^* = 55$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	CV	
$+Mx$	2	1	-1	0	0	1	0	5	ستون مصنوعی M
$-Mx$	1	1	0	0	-1	0	1	3	ستون مصنوعی M
+ ردیف Z	-20	-15	0	0	0	-M	-M	0	
Z جدید:	-20+3M	-15+2M	-M	0	-M	0	0	8M	

M بسیار بزرگ است پس اعداد M دار کنار گذاشته می‌شود و برای متغیر ورودی کاندید نمی‌شوند.

ضرایب M را نقش کننده‌اند مگر اینکه ضرایب M ثابت باشد پس عدد + کنار آنها را مقایسه می‌کنیم

هر متغیر مصنوعی که از پایه خارج شد ستونش خارج.

همانطور که می‌دانیم باقیمانده یک متغیر کمکی کمبود در جدول بهینه نشان دهنده این مطلب است که

مقدار سمت راست مورد نظر از منبع تولیدی مصرف نگردیده و موجودی آن در انبار باقی مانده است

در مثال حل شده همانطور که می‌بینید مقدار S_2 که در جدول بهینه برابر با ۷ می‌باشد یعنی اینکه از کل منبع دوم

که S_2 غیر صفر می‌باشد ۷ واحد در انبار باقی مانده است با مشاهده محدودیت منبع دوم متوجه می‌شویم

که میزان کل منبع در دسترس دوم برابر با ۳ واحد می‌باشد علت این اختلاف در ضریب ۳- متغیر x_1 در محدودیت

دوم می‌باشد ضریب ۳- به این معنی است که تولید هر واحد x_1 ۳ واحد به منبع دوم اضافه می‌نماید و قطعاً

چنین حالتی در دنیای واقعی اتفاق نمی‌افتد ولی در دنیای مجازی و ریاضی امکان چنین حالتی

وجود دارد

مثال) تست ۶۷ سال ۸۲

$\max Z = 3x_1 - 6x_2$

$St: \; 3x_1 + 4x_2 \geq 18$ 1

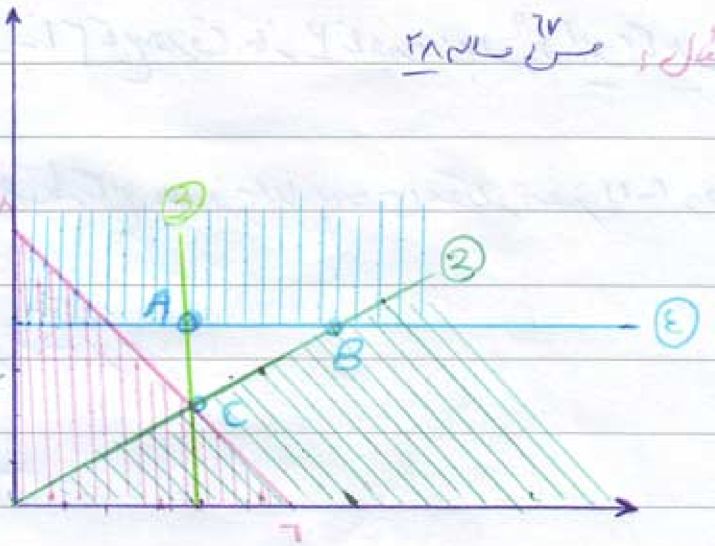
$x_1 - 2x_2 \leq 0$ 2 $\quad x_1 = 2x_2 \; \begin{array}{c|ccc} x_1 & 2 & 4 & 6 \\ x_2 & 1 & 2 & 3 \end{array}$

$x_1 \geq 4$ 3

$x_2 \leq 4$ 4

$x_1, x_2 \geq 0$

نقطه C بهینه چون تقاطع بیش از ۲ قید دارا است.



$A \left| \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 4 \end{array} \right. \qquad Z_A = 3(4) - 6(4) = -12$

$B \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{array} \right. \qquad Z_B = 3(2) - 6(4) = 18$

$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = 4 \end{array} \rightarrow 4 - 2x_2 = 0 \rightarrow \boxed{x_2 = 2} \qquad C \left| \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{array} \right. \qquad Z_C = 3(4) - 6(2) = 0$

تبهگن
بیش از ۲ قید دارد یعنی از C ۳

روش فاز 1 و فاز 2

فرآیند این روش برای حل یک مدل برنامه ریزی خطی به شرح زیر می باشد

1) ابتدا مدل را به فرم استاندارد تبدیل نمایید

2) متغیرهای مصنوعی محدودیت ها را شمارش نموده به ازای حاصل جمع آنها تابع هدف جدید به نام W که تابع هدف فاز 1

نامیده می شود تشکیل دهید این تابع هدف همواره Min می باشد $\qquad Min\ w = \sum_{i=1}^{m} R_i$

3) اولین تابلو Simplex را تشکیل دهید این تابلو دارای ۲ سطر تابع هدف می باشد تابع هدف W که

که بلافاصله تابع هدف فاز 1 ناپدید شده و تابع هدف z که تا آن تابع هدف فاز 2 نامیده می‌شود این تابلو موجه نمی‌باشد زیرا برای متغیرهای مصنوعی پایه در سطر تابع هدف w به جای مقدار صفر (1-) وجود دارد این ضرایب باید به صفر تبدیل شوند تا تابلو موجه گردد.

4) شروع فاز 1

پس از موجه شدن جدول یا تابلو فاز 1 آغاز می‌شود در این فاز ملاک تعیین متغیر ورودی فقط ضرایب متغیرهای غیرپایه در سطر تابع هدف w یا فاز 1 می‌باشد این فاز تا زمانی ادامه می‌یابد که تمامی متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شود با خروج آخرین متغیر مصنوعی تمامی ضرایب w صفر شده و مقدار عددی آن نیز صفر می‌گردد

نکته 9) اگر جدولی با روش فاز 1 فاز 2 حل می‌گردد و در فاز 1 به شرایط بهینگی دست یابد ولی حداقل یک متغیر مصنوعی با ارزش مثبت در پایه باقی مانده باشد نتیجه می‌گیریم که مدل دارای جواب بهینه نمی‌باشد

5) شروع فاز 2 خاتمه فاز 1 پس از خروج آخرین متغیر مصنوعی تمامی ضرایب w صفر و فاز 2 آغاز می‌شود ملاک تعیین متغیر ورودی در فاز 2 فقط ضرایب متغیرهای غیرپایه در سطر تابع هدف z می‌باشد فاز 2 تا زمانی ادامه می‌یابد که مدل به جواب‌های بهینه در صورت وجود دست یابد

6) شرایط تعیین متغیر ورودی، تعیین متغیر خروجی تشکیل جدول جدید Simplex و شرایط بهینگی مدل مانند

Subject: Date:

$R_1 \quad R_2 \quad w$

$w = \square + \bigcirc$ for

دستورالعمل گفته شده در الگوریتم Simplex است.

مثال) مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را با استفاده از روش ۲ فازی حل نمایید؟

$\max z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

$St: x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15$

$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	C.V
R_1	1	5	-3	-1	0	1	0	15
S_2	5	-6	10	0	1	0	0	20
R_2	1	1	1	0	0	0	1	5
Z	-5	6	7	0	0	0	0	0
W	0	0	0	0	0	-1	-1	0
R_1	1	5	-3	-1	0	1	0	15 5 min
S_2	5	-6	10	0	1	0	0	20
R_2	1	1	1	0	0	0	1	5 min 5
Z سطر	-5	6	7	0	0	0	0	0
W سطر	2	6	-2	-1	0	0	0	20
x_2	1/5	1	-3/5	-1/5	0	؟ حذف شده	0	3
S_2	31/5	0	32/5	-6/5	1	؟	0	38
R_2	4/5	0	8/5	1/5	0	؟	1	2 min
Z	-31/5	0	53/5	6/5	0	؟	0	-18
W	4/5	0	8/5	1/5	0	؟	0	2
x_2	1/2	1	0	-1/8	0	؟	؟	15/4
S_2	3	0	-2	-2	1	؟	؟	30
x_3	1/2	0	1	1/8	0	؟	؟	5/4
Z	-115/10	0	0	-1/8	0	؟	؟	-125/4
W	0	0	0	0	0	؟	؟	0

شروع phase 2 منفی‌ترین

Pilavaran

Subject: Date:

$\max Z - 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 0$ ایزوله

$St: \quad x_1 + 5x_2 - 3x_3 - S_1 + R_1 = 15$

$5x_2 - 6x_2 + 10x_3 + S_2 = 20$

$x_1 + x_2 + x_3 + R_2 = 5$

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	CV
معادله	$x(0)$	1	5	3	-1	0	1	0	15
	$+x(1)$	1	1	1	0	0	0	1	5
	$+w$ تابع w	0	0	0	0	0	-1	-1	0
جمع w		2	6	-2	-1	0	0	0	20

برای تعیین متغیر ورودی در فاز ۲ فقط ضرایب x ها است نه R ها و چون مسئله min است بیشترین ضریب وارد می‌شود

BV	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	CV
x_2	0	1	-1	$-\frac{1}{4}$	0	?	?	$5/2$
S_2	0	0	-6	$-\frac{21}{4}$	1	?	?	$45/2$
x_1	1	0	2	$\frac{1}{4}$	0	?	?	$5/2$
Z	0	0	23	$\frac{11}{4}$	0	?	?	$-5/2$

چون مدل max و همه مثبت هستند

↓

شرایط بهینه است.

$x_1^* = 5/2 \qquad x_2^* = 5/2 \qquad x_3^* = 0 \qquad Z^* = -5/2$

صفر

مدل ضد است، این برنامه پایین صفر شدن جواب داریم

حالت های خاص Simplex:

1) حالت های خاص Simplex بدون جواب:

هنگامی متغیری جهت ورود به پایه کاندید بشود ولی تمامی ضرایب بردار ستونی آن غیر مثبت باشد یا صفر و منفی باشند نتیجه می گیریم که مدل دارای جواب بهینه نمی باشد این امر در عالم واقعیت رخ نخواهد داد چنین وضعیتی معمولاً بیشتر ناشی از اشتباه در فرآیند مدل سازی می باشد

2) حالت خاص فضای جواب نامحدود، جواب بهینه محدود:

اگر متغیری کاندیدای ورود به پایه باشد ولی بعضی از ضرایب بردار ستونی آن غیر مثبت باشد می توان نتیجه گرفت که مدل دارای فضای جواب نامعلوم است ولی اگر نهایتاً حل مدل منجر به جوابهای بهینه گردد پس این حالت رخ می دهد

3) حالت خاص فضای جواب نامحدود، جواب بهینه نامحدود:

این وضعیت زمانی رخ می دهد که بعضی از ضرایب بردار ستونی متغیر ورودی غیر مثبت باشد در چنین حالتی فضا نامحدود است و اگر مدل فاقد جواب بهینه باشد نتیجه می گیریم که این حالت خاص رخ داده است

4) حالت خاص تباهیدگی:

هنگامی که مقدار سمت راست یکی از محدودیت های مدل صفر باشد و یا در تعیین متغیر خروجی بیش از یک متغیر کاندیدای خروج از پایه باشند مدل دارای حالت خاص تباهیدگی است

5) حالت خاص جواب بهینه چندگانه:

اگر ضریب یکی از متغیرهای غیرپایه در سطر تابع هدف جدول بهینه صفر گردد مدل دارای این حالت خاص می باشد

مدل های همزاد: Dual Model's (همزاد، قرینه، مزدوج، دوگان، همتا)

اگر یک مدل برنامه ریزی خطی به شکل زیر باشد

Primal (اولیه): $\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

St: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i$

$x_j \geq 0 \quad j=1,2,3,\dots,n$

آنگاه این مدل دارای مدل همزادی به شرح زیر خواهد بود.

Dual: $\min Z = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$

St: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq c_j$

$y_i \geq 0 \quad i=1,2,3,\dots,m$

فرآیند نوشتن یک مدل همزاد از روی یک مدل اولیه به شرح زیر می باشد.

اولیه Primal	همزاد Dual
Max	Min
اگر محدودیت iام $\leq$	متغیر iام ≥ 0
اگر محدودیت iام $\geq$	متغیر iام ≤ 0
اگر محدودیت iام $=$	متغیر iام آزاد در علامت
اگر متغیر jام ≥ 0	محدودیت jام $\geq$
اگر متغیر jام ≤ 0	محدودیت jام $\leq$
اگر متغیر jام آزاد در علامت	محدودیت jام $=$ مساوی

* اگر مدل اولیه Min بود جدول چپ را اولیه و سمت راست را همزاد می شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( ) برای min تمامی محدودیت‌ها ≥ و برای max تمامی محدودیت‌ها ≤

مثال) همزاد مدل خطی زیر را تشکیل دهید؟

$\max Z = 5x_1 + 6x_2 - 8x_3$

St: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 5 \longleftrightarrow y_1$

$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 7 \longleftrightarrow y_2$

$-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \longleftrightarrow y_3$

$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \longleftrightarrow y_4$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \leq 0$

x_3 آزاد در علامت

Dual: $\min Z = 5y_1 + 7y_2 + 2y_3 + 4y_4$

St: $2y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 \geq 5$ چون $x_1 \geq 0$

$3y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 2$ چون $x_2 \leq 0$

$5y_1 + 2y_2 + y_3 - 3y_4 = -8$ چون x_3 آزاد در علامت

$y_1 \geq 0$ $\quad y_3 \leq 0$

$y_2 \geq 0$ $\quad y_4$ آزاد در علامت

Dual → Primal →: $\max Z = 5x_1 + 2x_2 - 8x_3$

St: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 5$ چون $y_1 \geq 0$

$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 7$ $\quad y_2 \geq 0$

$-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$ $\quad y_3 \leq 0$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$ آزاد در علامت

$x_1 \geq 0$ $\quad x_2 \leq 0$

x_3 آزاد در علامت

 ص ۱۴۲ کتاب همرمان خوانده شود

خواص همزادی:

خاصیت همزادی ضعیف or Weak Duality:

اگر $\bar{x}_j$ برای $n, \ldots, 2, 1 = j$ یک جواب امکان پذیر برای مدل اولیه باشد و $\bar{y}_i$ برای $m, \ldots, 1 = i$ یک جواب امکان پذیر برای مدل همزاد باشد در این صورت خواهیم داشت

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j}_{\max \text{ } \text{محدودیت}} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i b_i}_{\min \text{ } \text{محدودیت}}$$

مدل اولیه max می‌باشد.

چرا از مدل همزاد استفاده می‌کنیم؟

1) تفسیر قیمت سایه

2) برای حل مسائل شکل سخت حل همزاد کار راحت‌تر باشد.

خاصیت همزادی قوی or Weak Strong:

اگر $\bar{x}_j$ برای $n, \ldots, 1 = j$ یک جواب امکان پذیر برای مدل اولیه باشد و $\bar{y}_i$ برای $m, \ldots, 1 = i$ یک جواب امکان پذیر برای مدل همزاد باشد و اگر مقدار تابع هدف هر ۲ مدل باهم برابر باشد

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i b_i$$

آنگاه $\bar{x}_j$ یک جواب بهینه برای مدل اولیه و $\bar{y}_i$ یک جواب بهینه برای مدل همزاد می‌باشد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال) مدل برنامه ریزی زیر را در نظر گرفته همزاد آن را تشکیل داده هر دو مدل را حل ضمن بررسی خواص همزادی قوی و ضعیف نحوی پیدا کردن جواب های بهینه مدل همزاد (اولیه) از روی جواب بهینه مدل اولیه

$\min Z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min Z - 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - MR_1 - MR_2 - MR_3 = 0$ [illegible]

$St: \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \rightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 + R_1 - S_1 = 3$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \rightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_3 - S_2 + R_2 = 1$

$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \rightarrow x_1 + 3x_2 + x_3 - S_3 + R_3 = 3$

$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	C.P
R_1	2	1	2	-1	0	0	1	0	0	3
R_2	1	2	2	0	-1	0	0	1	0	1
R_3	1	3	1	0	0	-1	0	0	1	3
Z	-2	-5	-6	0	0	0	-M	-M	-M	0
R_1	2	1	2	-1	0	0	1	0	0	3
R_2	1	2*	2	0	-1	0	0	1	0	1
R_3	1	3	1	0	0	-1	0	0	1	3
Z	$-2+4M$	$-5+6M$	$-6+5M$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$7M$
R_1	$\frac{3}{2}$	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	1	?	0	$\frac{5}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	?	0	$\frac{1}{2}$
R_3	$-\frac{1}{2}$	0	-2	0	$\frac{3}{2}$*	-1	0	?	1	$\frac{3}{2}$
Z	$\frac{1}{2}+M$	0	$-1-M$	$-M$	$-\frac{5}{2}+2M$	$-M$	0	?	0	$\frac{5}{2}+4M$
R_1	$\frac{5}{3}$*	0	$\frac{5}{3}$	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	?	?	2
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	?	?	1
S_2	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	?	?	1
Z	$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}M$	0	$-\frac{13}{3}+\frac{5}{3}M$	$-M$	0	$-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}M$	0	?	?	$5+2M$
x_1	1	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	?	?	?	$\frac{6}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	?	?	?	$\frac{3}{5}$
S_2	0	0	-1	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	?	?	?	$\frac{7}{5}$
Z	0	0	-4	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{8}{5}$	?	?	?	$\frac{27}{5}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

دوگان: $Max\ Z = 3y_1 + y_2 + 3y_3 \rightarrow Max\ Z - 3y_1 - y_2 - 3y_3 = 0$

همان کمکی می‌خواهیم

و کاریم تا حالا می‌شوند

t عوض می‌دهیم.

$St: \quad 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \rightarrow 2y_1 + y_2 + y_3 + t_1 = 2$

$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 5 \rightarrow y_1 + 2y_2 + 3y_3 + t_2 = 5$

$2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 6 \rightarrow 2y_1 + 2y_2 + y_3 + t_3 = 6$

$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$

B.V	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	t_3	C.V
t_1	2	1	1	1	0	0	2 min
t_2	1	2	3	0	1	0	5
t_3	2	2	1	0	0	1	6
Z	-3	-1	-3	0	0	0	0
y_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
t_2	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	4 min
t_3	0	1	0	-1	0	1	4
Z	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	3
y_1	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
y_3	0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
t_3	0	1	0	-1	0	1	4
Z	0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{27}{5}$

PAPCO

دستورالعمل پیدا کردن جواب بهینه‌ی مدل همزاد از روی جواب‌های بهینه مدل اولیه و بالعکس:

فرآیند پیدا کردن جواب‌های بهینه مدل همزاد از روی اولیه و بالعکس به شرح زیر می‌باشد:

1) ابتدا به ازای هر متغیر اصلی در مدل اولیه x_j یک متغیر کمکی کمبود برای مدل همزاد (t_j) منظور نموده و دیگر اینکه به ازای هر متغیر کمکی کمبود یا مازاد برای مدل اولیه (S_i) متناظر آن یک متغیر اصلی برای مدل همزاد (Y_i) تعریف می‌کنیم

$S_i \longleftrightarrow Y_i$ ، $x_j \longleftrightarrow t_j$

2) سطر افقی تابلو مدل اولیه را به ترتیب ابتدا متغیرهای اصلی (x_j) سپس متغیرهای کمکی کمبود و مازاد مرتب می‌نماییم

3) برای یافتن متغیرهای پایه در جدول بهینه مدل اولیه ضرایب غیر صفر در سطر تابع هدف جدول بهینه همزاد را مشخص نموده متغیرهای متناظر آنها را مستقیماً وارد پایه می‌نماییم

4) ضرایب سطر تابع هدف جدول بهینه همزاد بدون تغییر علامت متناظراً در ستون اعداد ثابت سمت راست جدول بهینه اولیه (C.V) قرار می‌دهیم (این شرایط هنگامی رخ می‌دهد که مدل اولیه Min و مدل همزاد Max باشد) در غیر این صورت ضرایب انتقال یافته (1-)× می‌شود

(اولیه Max و همزاد Min)

5) ضرایب ثابت سمت راست (C.V) جدول بهینه همزاد با تغییر علامت مستقیماً و متناظراً به سطر تابع هدف جدول بهینه اولیه منتقل می‌شود

6) برای متغیرهای پایه در جدول بهینه اولیه بردارهای ستونی واحد در نظر گرفته برای یافتن مقادیر ضرایب محل تلاقی آنها را در جدول بهینه همزاد مشخص این ضرایب متناظر را با تغییر علامت، جدول بهینه اولیه منتقل می‌شود

7) مطابق خاصیت همزادی عدد مقدار بهینه تابع هدف هر ۲ جدول باید با هم برابر باشد

	S_1	S_2	S_3	x_1	x_2	x_3	
B.V	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	t_3	C.V
$S_1 \leftarrow y_1$	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$S_2 \leftarrow y_2$	0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
$x_3 \leftarrow t_3$	0	1	0	-1	0	1	4
Z	0	$\frac{7}{5}$	0	$+\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{27}{5}$

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	CV
S_2	0	0	-1	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_1	1	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
Z	0	0	-4	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{8}{5}$	$\frac{27}{5}$

Simplex همزاد : Dual simplex

پس از بوجود آمدن روابط میان مدل‌های اولیه و همزاد یک ریاضی‌دان آمریکایی بر این اساس روشی را ابداع کرد که یک برنامه‌ریزی غیرخطی از یک فضای ناموجه و بهینه ← جواب‌های موجه و بهینه حرکت نمود این روش به

Simplex همزاد معروف گردید که فرآیند محاسباتی آن به شرح زیر می‌باشد

Subject:

Year. Month. Date. ( )

۲-۳) زمانی است مدلی که LP با Simplex قابل حل می‌گردد باید 2 ویژگی داشته باشد که به صورت توأم باشد

۱) علامت ضرایب سطر تابع هدف قبل از متعارف کردن در مدل max ← منفی و در مدل Min ← مثبت باشد

۲) علامت نامساوی ≤ و اعداد ثابت سمت راست مثبت باشد

... باید ۲ صفت بالا را باهم داشته باشد تا مدل قابل حل باشد

... ابتدا کلیه محدودیت‌های مدل را که به فرم نامعادله ≤ می‌باشد در (۱-) ضرب نمایید با انجام این کار علامت

نامعادلات به ≥ تغییر شکل یافته و علامت اعداد ثابت سمت راست منفی می‌شوند

مدل را به فرم متعارف تبدیل نموده و اولین تابلو Simplex را تشکیل دهید این تابلو دارای ۲ ویژگی می‌باشد

اولاً بهینه بوده ثانیاً ناموجه می‌باشد

تعیین متغیر خروجی: برای تعیین این متغیر از میان ضرایب منفی ثابت سمت راست (Cj) منفی‌ترین

انتخاب مربوطه هر متغیری که باشد متغیر مورد نظر کاندیدای خروج از پایه می‌گردد

تعیین متغیر ورودی: پس از تعیین متغیر خروجی بردار سطری آن متغیر را مشخص نموده ضرایب

منفی آن را علامت گذاری کرده سپس ضرایب سطر تابع هدف متناظر را بر آنها تقسیم Min قدر مطلق

... حاصل از تقسیم نشان دهنده متغیر ورودی می‌باشد

$\min \left| \frac{c_j}{a_{ij}} \right|$ قدر مطلق

$\forall a_{ij} < 0$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

نکته: اگر تمامی ضرایب سطر متغیر خروجی غیرمنفی باشند نتیجه می‌گیریم مدل دارای جواب‌های موجه نمی‌باشد

5) تشکیل جدول جدید Simplex: همانند دستورالعمل گفته شده در الگوریتم Simplex می‌باشد

$CF \geq 0$

6) شرایط بهینگی: مدلی به روش Simplex دوگان حل می‌گردد وقتی بهینه است که تمامی مقادیر ثابت سمت راست مثبت شده باشند

مثال) مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را با استفاده از روش Simplex دوگان حل نمایید؟

$\text{Min } Z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \longrightarrow \text{Min } Z - 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0$

st:

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \xrightarrow{\times -1} -2x_1 - x_2 - 2x_3 + S_1 = -3$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \longrightarrow -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + S_2 = -1$

$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \longrightarrow -x_1 - 3x_2 - x_3 + S_3 = -3$

$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$

BV	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	CF	min
خروجی S_1	-2^*	-1	-2	1	0	0	-3	Min
S_2	-1	-2	-2	0	1	0	-1	
S_3	-1	-3	-1	0	0	1	-3	
Z	-2	-5	-6	0	0	0	0	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	
S_2	0	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	
خروجی S_3	0	$-\frac{5}{2}^*$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	Min
Z	0	-4	-4	-1	0	0	3	
x_1	1	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	
S_2	0	0	-1	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$	
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	
Z	0	0	-4	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{8}{5}$	$\frac{27}{5}$	

ناموجه بهینه ⇐ موجه بهینه

تفسیر اقتصادی جداول Simplex:

با توجه به اینکه الگوریتم simplex بر مبنای یک شرایط واقعی طراحی و اجرا می گردد هر یک از ضرایب عددی درون جدول می تواند بیانگر حالتی باشد که در آن میزان افزایش - کاهش و یا انتقال عاملان مواد خام مورد نیاز به همراه سود ایجاد شده یا سود از دست رفته نمایش داده شود

مثال) مدل برنامه ریزی خطی زیر را به همراه جداول آن در نقشه بکشید؟

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow \max Z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$$

$$St: \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430 \longrightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \le 460 \longrightarrow 3x_1 + 2x_3 + S_2 = 460$$

$$x_1 + 4x_2 \le 420 \longrightarrow x_1 + 4x_2 + S_3 = 420$$

$$x_j \ge 0 \quad j=1,2,3 \qquad\qquad x_j \ge 0 \quad j=1,2,3$$

BV	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	حل
S_1	1	2	1	1	0	0	430
S_2	3	0	2	0	1	0	460
S_3	1	4	0	0	0	1	420
Z	-3	-2	-5	0	0	0	0
S_1	$-\frac{1}{2}$	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	200
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	1	4	0	0	0	1	420
Z	$\frac{9}{2}$	-2	0	0	$\frac{5}{2}$	0	1150
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z	4	0	0	1	2	0	1350

به صفحه‌های بعد تفسیر جداول نگاه کنید

تفسیر x_1 در جدول ۲ *

سود: افزایش تولید x_1 به میزان ۱ واحد	ضرر: کاهش تولید x_3 به میزان $\frac{3}{2}$ واحد	سود: مازاد منبع S_1 به میزان $\frac{1}{2}$	ضرر: استفاده از منبع S_3 به میزان ۱ واحد
۱ واحد	$\frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$	$1 \times 0 = 0$
۳ واحد	$\frac{3}{2} \times 2 = 3$	$-\frac{1}{2} \times 0 = 0$	$1 \times 0 = 0$
۱ واحد	$\frac{3}{2} \times 0 = 0$	$-\frac{1}{2} \times 0 = 0$	$1 \times 1 = 1$

سود بدست آورده:

افزایش تولید x_1 به میزان ۱ واحد $1 \times 3 = 3$

مازاد منبع S_1 به میزان $\frac{1}{2}$ واحد $\frac{1}{2} \times 0 = 0$

$+ \quad 3$

سود از دست رفته:

کاهش تولید x_3 به میزان $\frac{3}{2}$ واحد $\frac{3}{2} \times 5 = \frac{15}{2}$

استفاده از منبع S_3 به میزان ۱ واحد $1 \times 0 = 0$

$+ \quad \frac{15}{2}$

$$\frac{15}{2} - 3 = \boxed{\frac{9}{2}} *$$

تفسیر اقتصادی x_1 در جدول ۳:

سود: افزایش تولید x_1 به میزان ۱ واحد	ضرر: کاهش تولید x_3 به میزان $\frac{3}{2}$	سود: افزایش تولید x_2 به میزان $\frac{1}{4}$	ضرر: استفاده از منبع S_3 به میزان ۲ واحد
۱ واحد	$1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4} \times 2 = -\frac{1}{2}$	$2 \times 0 = 0$
۳ واحد	$3 \times \frac{3}{2} = 3$	$-\frac{1}{4} \times 0 = 0$	$2 \times 0 = 0$
۱ واحد	$\frac{3}{2} \times 0 = 0$	$-\frac{1}{4} \times 4 = -1$	$2 \times 1 = 2$

سود بدست آمده:

افزایش تولید x_1 به میزان ۱ واحد $1 \times 3 = 3$

" " x_2 " $\frac{1}{4}$ واحد $\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$

$\frac{7}{2}$

ضرر بدست آمده:

کاهش تولید x_3 به میزان $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2} \times 5 = \frac{15}{2}$

استفاده از منبع S_3 به میزان ۲ $2 \times 0 = 0$

$\frac{15}{2}$

$$\frac{15}{2} - \frac{7}{2} = \boxed{4} *$$

تفسیر اقتصادی متغیر S_3 در جدول ۳:

تفسیر اقتصادی بیانگر این مطلب است که برای بدست آوردن هر یک واحد از منبع دوم (S_2) با تولید x_2، $\frac{1}{2}$ واحد کاهش یافته. فعالیتی که از این کاهش تولید آزاد می‌گردد بیشتر از حد نیاز می‌باشد که با آن می‌توان تولید x_2 را $\frac{1}{4}$ واحد افزایش داد این عملیات علاوه بر اینکه موجب تأمین ۱ واحد S_2 می‌گردد نیاز به ۱ واحد از منبع سوم بیشتر می‌شود

چنین فعالیت‌هایی در جدولی که انجام می‌گیرد موجب می‌گردد تا ۲ واحد پول ضرر نماییم

استفاده از منبع S_3 به میزان ۱ واحد (ضرر)	افزایش تولید x_2 به میزان $\frac{1}{4}$ واحد (سود)	کاهش تولید x_3 به میزان $\frac{1}{2}$ واحد (ضرر)	بدست آوردن ۱ واحد منبع S_2 (سود)	
$1 \times 0 = 0$	$-\frac{1}{4} \times 2 = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$	۰ واحد	S_1
$1 \times 0 = 0$	$-\frac{1}{4} \times 0 = 0$	$\frac{1}{2} \times 2 = 1$	۱ واحد	S_2
$1 \times 1 = 1$	$-\frac{1}{4} \times 4 = -1$	$\frac{1}{2} \times 0 = 0$	۰ واحد	S_3

سود:

بدست آوردن ۱ واحد S_2 $\quad 1 \times 0 = 0$

افزایش تولید x_2 به میزان $\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

ضرر:

کاهش تولید x_3 به میزان $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$

استفاده از منبع S_3 به میزان ۱ $\quad 1 \times 0 = 0$

$\frac{5}{2}$

$\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{2}$ ضرر

ص ۵۷ سؤال ۲)

x_{ij} تولید فقط در ساعات عادی $\quad j = 1, 2$

y_i اضافه کار $\quad i = 1, 2$

A: هزینه‌های انبارداری

$$Min\ z = 80x_1 + 95x_2 + 5A + 60y_1 + 70y_2 + 3A$$

st:

$x_1 \leq 1200 \qquad x_1 + y_2 \geq 320$

$x_2 \leq 400 \qquad x_2 + y_2 \geq 500$

$x_1 = \frac{1}{2} x_2 \qquad x_1 + y_1 \geq 300$

$x_1 + y_1 \geq 200 \qquad x_2 + y_2 \geq 550$

$x_2 + y_2 \geq 400$

سؤال ۲۰ ص ۶۵ کتاب مجید طاها

سؤال امتحان بوده

مبنای ریاضی Simplex:

در محاسبات مربوط به الگوریتم Simplex ماتریسی به نام ماتریس B^{-1} که عبارت است از معکوس ماتریس متغیرهای پایه هر جدول در جدول اول یا مدل داده می‌باشد به عبارت بهتر در صورت وجود یافتن این ماتریس و مدل ابتدایی یا جدول اول Simplex با استفاده از 5 معادله زیر می‌توان تمام اطلاعات هر جدول را بدون استفاده از مراحل Simplex محاسبه نمود معادلات 5 گانه به ترتیب به شرح زیر می‌باشند

1) $\bar{A}_j = B^{-1}A_j \qquad j=1,2,\dots,n$

A_j: عبارت است از بردار ستونی متغیر اصلی j ام در مدل یا جدول اول

$\bar{A}_j$: . . . . در هر جدولی به جز جدول اول

B^{-1}: عبارت است از معکوس ماتریس متغیرهای پایه جدولی که مقدار $\bar{A}_j$ آن مجهول می‌باشد در مدل یا جدول اول

2) $\bar{b} = B^{-1}b$

b: عبارت است از بردار ستونی اعداد ثابت سمت راست (CV) در مدل یا جدول اول

$\bar{b}$: عبارت است از بردار ستونی اعداد ثابت سمت راست در هر جدولی جز جدول اول

3) $y = \bar{C}^B \cdot B^{-1} - C^B$

y: عبارت است ضرایب متغیرهای پایه جدول اول در سطر تابع هدف هر جدولی به جز جدول اول که مقادیر آن مجهول می‌باشد

$\bar{C}$: عبارت است از ضرایب متغیرهای پایه جدولی که مقدار y آن مجهول می‌باشد در سطر تابع هدف جدول

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اول جدول $X(-1)$ (در صورتی که این ضرایب از سطر تابع هدف با علامت مخالف استخراج می‌گردند نیازی به ضرب در (1-) نمی‌باشد)

C^B: عبارت است از ضرایب متغیرهای پایه جدول اول در سطر تابع هدف همان جدول اول ضرب در (1-) (در صورتی که مدل فاقد متغیرهای مصنوعی باشد) یا به عبارت دیگر جای کوروت‌های مدل به فرمی که با مقادیر CV هم برابر با صفر می‌باشند

سود از دست رفته

$$4)\ Z_j - C_j = (C^B \cdot B^{-1} - C^B) A_j - C_j = yA_j - C_j$$

سود بدست آمده

$Z_j - C_j$: عبارت است از ضریب متغیر اصلی j ام در سطر تابع هدف هر جدولی که مقایسه آن محصول با صفر می‌باشد

C_j: عبارت است از ضریب متغیر اصلی j ام در سطر تابع هدف جدول اول با حل ضرب در (1-) اگر این ضرایب از سطر تابع هدف با علامت مخالف استخراج گردد نیازی به ضرب در (1-) ندارد.

$$5)\ Z = (\underbrace{C^B \cdot B^{-1} - C^B}_{y}) b \Rightarrow Z = yb$$

Z: عبارت است از مقدار تابع هدف مدل در هر تکرار Simplex که نشان دهنده سود یا هزینه می‌باشد

مثال) مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر گرفته ابتدا به روش Simplex آن را حل نموده سپس اطلاعات یکی از جداول آن را با استفاده از معادلات فوق بدست می‌آوریم.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow \text{Max } Z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$$

$$\text{st: } x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430 \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \le 460 \qquad 3x_1 + 2x_3 + S_2 = 460$$

$$x_1 + 4x_2 \le 420 \qquad x_1 + 4x_2 + S_3 = 420$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, 3$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

B.V	A_1 x_1	A_2 x_2	A_3 x_3	S_1	S_2	S_3	b C.V
S_1	۱	۲	۱ جدول B	۱	۰	۰	۴۳۰
S_2	۳	۰	۲	۰	۱	۰	۴۶۰
S_3	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۴۲۰
Z	-۳	-۲	-۵	۰	۰	۰	۰
S_1	-۱/۲	۲	۰ جدول B	۱	-۱/۲	۰	۲۰۰
x_3	۳/۲	۰	۱	۰	۱/۲	۰	۲۳۰
S_3	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۴۲۰
Z	۹/۲	-۲	۰	۰	۵/۲	۰	۱۱۵۰
	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$				$\bar{b}$
x_2	-۱/۴	۱	۰	۱/۲	-۱/۴	۰	۱۰۰
x_3	۳/۲	۰	۱	۰	۱/۲	۰	۲۳۰
S_3	۲	۰	۰	-۲	۱	۱	۲۰
Z	۴	۰	۰	۱	۲	۰	۱۳۵۰

جدول دوم B = $\begin{array}{ccc} S_1 & x_3 & S_3 \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ جدول سوم B = $\begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & S_3 \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

دترمینان B_3 : $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ ۲ ۱ / ۰ ۲ / ۴ ۰ قطر اصلی - قطر فرعی : ۴ - ۰ = ۴ → $|B| = ۴$

A = ۲
J = ۱ ، ۴ عدد

$\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & -۸ \\ -۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۸ & ۴ & ۴ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ۱/۲ & -۱/۴ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$

ماتریس — ۴ تا طرف نشان را علامت کردیم — تقسیم بر ۴ کردم

از جدول آخر (۲) مسئله اولیه شکل بخواهیم بدست آوریم:

$\bar{A}_j = B^{-1}A_j \qquad j=1,2,3$

$$\bar{A}_1 = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_3 = B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$y = C^{B} B^{-1} - C^{B} = (2,5,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - (0,0,0) = (\underset{S_1}{1}, \overset{S_2}{2}, \underset{S_3}{0})$$

$Z_j - C_j = yA_j - C_j \qquad j=1,2,3$

$Z_1 - C_1 = yA_1 - C_1 = (1,2,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 7 - 3 = 4$ چون تبهگن است باید صفر شود

$Z_2 - C_2 = yA_2 - C_2 = (1,2,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 = 0$

$Z_3 - C_3 = yA_3 - C_3 = (1,2,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 = 0$ در نتیجه باید صفر شود

$Z = yb \rightarrow Z = (1,2,0)\begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = 430 + 920 = 1350$

c_2

Z

۱۳۵۰

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\text{Min } Z = 20x_1 + 15x_2 \longrightarrow \text{Min } Z - 20x_1 - 15x_2 - MR_1 - MR_2 = 0$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 \geq 5 \qquad 2x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 5$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3 \qquad -3x_1 + 2x_2 + S_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 3 \qquad x_1 + x_2 - S_3 + R_2 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

BV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	CV
R_1	2	1	-1	0	0	1	0	5
S_2	-3	2	0	1	0	0	0	3
R_2	1	1	0	0	-1	0	1	3
سطر Z	-20	-15	0	0	0	$-M$	$-M$	0
Z نو	$-20+3M$	$-15+2M$	$-M$	0	$-M$	0	0	$8M$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
S_2	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{21}{2}$
R_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
Z	0	$-5+\frac{1}{2}M$	$-10+\frac{1}{2}M$	0	$-M$	$10-\frac{3}{2}M$	0	$50+\frac{1}{2}M$
x_1	1	0	-1	0	1	1	-1	2
S_2	0	0	-5	1	7	5	-7	7
x_2	0	1	1	0	-2	-1	2	1
Z	0	0	-5	0	-10	$5-M$	$10-M$	55

* جدول نهایی در شرایطی که مدل دارای متغیر مصنوعی می باشد: *

در صورتی که تمامی نامعادلات یک مدل برنامه ریزی خطی به فرم ≥ نباشند وجود متغیر مصنوعی اجتناب ناپذیر بوده و ضرایب سطر تابع هدف (معادلات سوم و چهارم) + مقدار تابع هدف (معادله ...) تغییر می یابد

در چنین شرایطی ابتدا باید ضرایب موجود سطر تابع هدف را محاسبه نموده سپس به معادلات کل جدول اطلاعات

جدول را تکمیل نماییم لازم به ذکر است مقدار C_j های دیگر برابر با صفر می‌باشد ضمناً مقدار تابع هدف در

هر تکرار برابر است با $Z = yb - Z_{\text{موهوم}}$

در جدولی که دارای متغیر مصنوعی می‌باشد ابتدا باید ضرایب موهوم در تابع هدف موهوم را محاسبه نموده سپس

با معادلات بنیادی ریاضی اطلاعات هر جدول را می‌توانیم محاسبه نماییم

به عنوان مثال فرض نمایید ماتریس B^{-1} یکی از جداول مثال قبل به صورت زیر می‌باشد

$$\underset{\text{جدول سوم}}{B_2^{-1}} = \begin{array}{ccc} R_1 & S_2 & R_3 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}$$

$$y = C^B \cdot B^{-1} = (M,0,M)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (M,0,M)$$

$$Z_1 - C_1 = yA_1 - C_1 = (M,0,M)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 20 = -20 + 3M$$

$$Z_2 - C_2 = yA_2 - C_2 = (M,0,M)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 15 = -15 + 2M$$

$$Z_{S_1} - C_{S_1} = yA_{S_1} - C_{S_1} = (M,0,M)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -M$$

$$Z_{S_3} - C_{S_3} = yA_{S_3} - C_{S_3} = (M,0,M)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -M$$

$$Z = yb = (M,0,M)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 8M$$

$$\bar{A}_j = B^{-1}A_j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & S_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & S_1 & S_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = C^{B} B^{-1} = C_B (20, 0, 15) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (M, 0, M) = (5, 0, 10) - (M, 0, M) =$$

$$(5 - M, 0, 10 - M)$$

$$Z_1 - C_1 = yA_1 - C_1 = (5 - M, 0, 10 - M) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - (20 - 3M) = 10 - 2M + 10 - M - 20 + 3M$$

$$Z_2 - C_2 = yA_2 - C_2 = (5 - M, 0, 10 - M) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - (15 - 2M) = 5 - M + 10 - M - 15 + 2M = 0$$

$$Z_{s_1} - C_{s_1} = yA_{s_1} - C_{s_1} = (5 - M, 0, 10 - M) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - M = -5 + M - M = -5$$

$$Z_{s_3} - C_{s_3} = yA_{s_3} - C_{s_3} = (5 - M, 0, 10 - M) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - M = -10 + M - M = -10$$

$$Z = yb - Z_{\text{موج}} = (5 - M, 0, 10 - M) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - (-8M) = 25 - 5M + 30 - 3M + 8M = 55$$

B.V	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	حل
x_1	1	0	-1	-0	0	1	1	-1	2
s_2	0	0	-5	0	0	7	5	-7	7
x_2	0	1	1	5	0	2	-1	2	1
Z	0	0	-5	0	-10	-10	$5-M$	$10-M$	55