مثال: دو بردار $\vec{A}=2i+3j$ و $\vec{B}=-i+2j$ در صفحه xy قرار دارند $\vec{A}\times\vec{B}=?$ را حساب کنید و نشان دهید که

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(0)i-(0)j+\left[2\times2-3(-1)\right]k$$

$$=7\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{B}\times\vec{A}=(-i+2j)\times(2i+3j)=(-i\times3j+2j\times2i=-3k-4k$$

$$=-7\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

پس ثابت شد.

تمرین: سه بردار $\vec{A}=3i+3j-2\hat{k}$ و $\vec{B}=-i-4\hat{j}+2\hat{k}$ و

$$\vec{C}=2i+2j+k$$

الف) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=?$

ب) $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=?$

ج) $A\times(\vec{B}+\vec{C})=?$

جواب الف) -21 و جواب ب) -9 و جواب ج) $5\hat{i}-11\hat{j}-9\hat{k}$

تمرین اگر $\vec{A}=3\hat{i}+\hat{j}$ و $B=-i+2j$ باشد آنگاه $\vec{A}\cdot\vec{B}$ را بدست آورید

تمرین: اگر $\vec{A}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ و $B=-\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ و $C=2\hat{j}-3\hat{k}$ باشد آنگاه $\vec{C}\cdot(\vec{A}-\vec{B})=?$

جواب: ۱۲

ضرب برداری دو بردار:

$$\vec{A}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$$
$$\vec{B}=b_x i+b_y j+b_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=(|AB\sin\theta|)\,\hat{a}_n$$

بردار یکه عمود بر صفحه تشکیل از $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می باشد:

$$i\times i=j\times j=k\times k=0$$
$$i\times j=-j\times i=\hat{k}$$
$$j\times k=-k\times j=\hat{j}$$
$$k\times i=+k\times(-i)=\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=(a_y b_z-a_z b_y)i+(a_z b_x-a_x b_z)j+(a_x b_y-a_y b_x)\hat{k}$$

یادآوری دترمینان ماتریس

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$$

$5\hat i-11\hat j-9\hat k$ (ج ، طرح ، ۹- (ب

(۸)

تمرین: اگر $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ و $\vec{B} = -5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ می‌باشد

الف) $A+B=?$ ، ب) $\vec{A}+\vec{B}=?$

ج) $|\vec{A}+\vec{B}|=?$

ضرب بردارها: ← ۱) ضرب اسکالر (عددی - نقطه‌ای)
۲) ضرب برداری

۱) ضرب اسکالر دو بردار بصورت $\vec{A}\cdot\vec{B}$ نوشته میشود و حاصل آن یک عدد می‌باشد

الف) $\vec{A}\cdot\vec{B} = |A|\cdot|B|\cdot\cos\theta$

زاویه بین دو بردار

ب) $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = \hat{i}\cdot\hat{k} = k\cdot\hat{j} = \cdots = 0$

مثال: بردارهای $\vec{A} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ و $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ داده شده‌اند

الف) $\vec{A}\cdot\vec{B} = ?$ (ب) زاویه θ بین $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را بدست آورید؟

الف) $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (2)(-1) + (3)(2) + (0)(0)$

$= -2 + 6 = 4$

ب) $A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$

$B = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$

$\Rightarrow \theta \simeq 60^\circ$

اگر $\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

$\vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ $\Rightarrow \vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{C} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{C}| = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2}$$

مثال: اگر $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ و $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{k}$ باشد

آنگاه $A+B$ و $|\vec{A} + \vec{B}|$ را بدست آورید؟

$$|\vec{A}| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{14} = 3{,}74$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 4{,}47$$

$\Rightarrow A+B = 3{,}74 + 4{,}47 = 8{,}21$

و

$$\vec{A} + \vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} + 2\hat{i} - 4\hat{k} = (1+2)\hat{i} + (-3+0)\hat{j} + (2-4)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

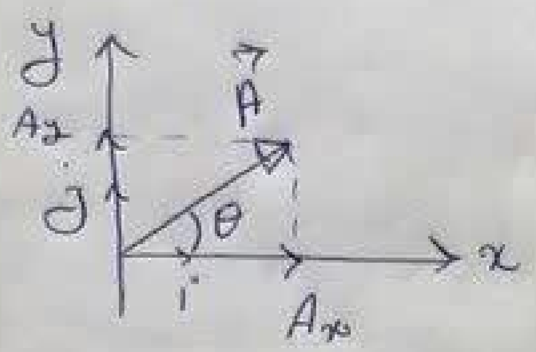
$$\Rightarrow |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{22} = 4{,}69$$

پس می‌توان گفت در حالت کلی اندازه‌ی برآیند دو بردار با حاصل جمع اندازه‌ی آنها مساوی نیست

[illegible] شرکت پذیرند $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

تفریق برداری: تفریق حالت خاصی از جمع برداری است به عنوان مثال برای بدست آوردن $\vec{A}-\vec{B}$ ابتدا آن را به یک عمل جمع برداری تبدیل می‌کنیم

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$



مؤلفه‌های یک بردار واقع در صفحه:

$$\cos\theta=\frac{A_x}{A}\Rightarrow A_x=A\cos\theta$$

$$\sin\theta=\frac{A_y}{A}\Rightarrow A_y=A\sin\theta$$

$$\vec{A}=\sqrt{A_x^2+A_y^2}\quad,\quad \theta=\tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$$

$$|i|=|j|=|k|=1$$

جهت محور xها — جهت محور yها — جهت محور zها

آنگاه یک بردار سه بعدی بصورت

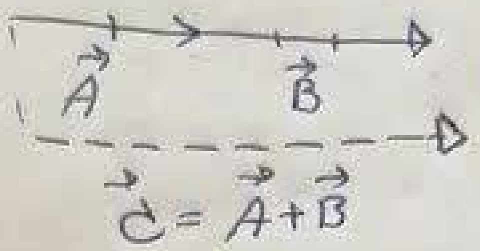
$$\vec{A}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

جمع بردارها (بخصوص دو بردار) حالتهایی وجود دارد

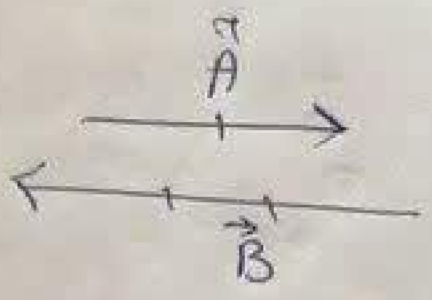
۱) دو بردار هم جهت اند:

$\Rightarrow$

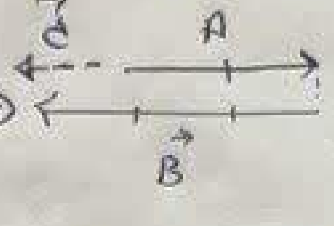


$\Rightarrow \vec{C}=\vec{A}+\vec{B} \Rightarrow |\vec{C}|=|\vec{A}+\vec{B}|=$
$=۲+۳=۵$

۲) دو بردار در خلاف جهت همدیگرند

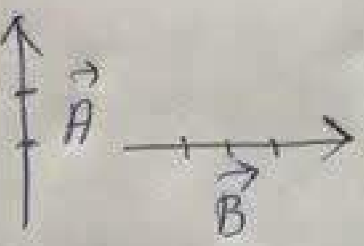


$\Rightarrow$

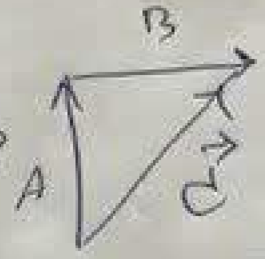


$\Rightarrow \vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$
$|\vec{C}|=|\vec{A}-\vec{B}| \Rightarrow$
$|\vec{C}|=|۲-۳|=۱$

۳) دو بردار بر هم عمودند:



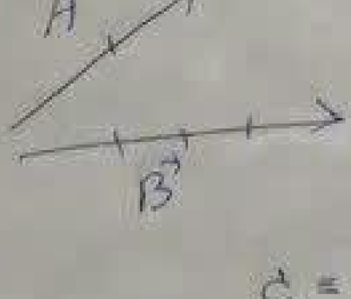
$\Rightarrow$



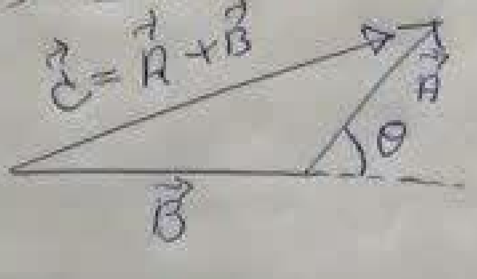
$\Rightarrow \vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

$\Rightarrow |\vec{C}|=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$

۴) دو بردار با هم زاویه دلخواهی مثل θ ( ) بسازند



$\Rightarrow$



$c = a^2+b^2+2ab\cos\theta$

فصل دوم بردارها

کمیت‌های اسکالر (نرده‌ای-عددی): کمیت‌هایی که فقط با یک عدد بیان می‌شوند و یکای معین داشته باشند

جرم: ۲ kg
عدد یکا

زمان: ۸۰ s
عدد یکا

مساحت ← ۴ m^2
عدد یکا

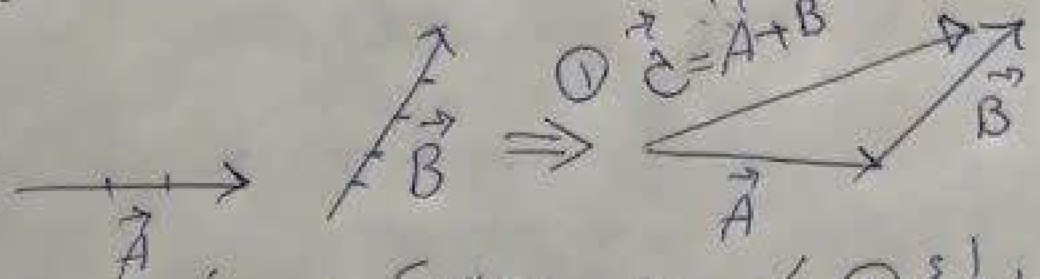
کمیت‌های برداری: کمیت‌هایی که علاوه بر عدد و یکا دارای راستا، جهت و نقطه اثر باشند: مانند جابجایی ۴ متر به سمت شمال
عدد یکا جهت

که معمولاً با علامت ← نمایش داده می‌شوند

$\vec{A} = 4(m)\,i$ بردار A

و اندازه $|\vec{A}|$ که بعددی $|\vec{A}| = 4$ می‌باشد.

جمع برداری آنها: به روش هندسی یا برداری
- قانون ابتدا به انتها (مثلث)
- قانون متوازی الاضلاع



توجه فرمائید که رابطه ① یک رابطه برداری است و با جمع اسکالر تفاوت دارد

(1)

بسمه تعالی

جزوه فیزیک تکاپک

فصل اول - دستگاههای اندازه‌گیری و تبدیل آنها به یکدیگر:

الف - کمیت‌های اصلی: کمیت‌هایی که مستقل بوده و به هیچ کمیت دیگری وابسته نباشند مثل ← طول (m) زمان (s) جرم (kg)
مقدار ماده (mol)، دمای ترمودینامیکی (K)، جریان الکتریکی (A)
شدت روشنایی (cd)

ب) کمیت‌های فرعی: به کمیت‌هایی گفته میشود که مستقل نبوده و به کمیت‌های اصلی وابسته باشند مانند ← ($\frac{m}{s^2}$) سرعت ($\frac{m}{s}$) حجم (m^3)
مساحت (m^2) نیرو (N) ($kg\frac{m}{s^2}$) و.....

جدول پیشوندهای SI

نماد	پیشوند	ضریب	نماد	پیشوند	ضریب
d	دسی	10^{-1}	da	دکا	10^{+1}
c	سانتی	10^{-2}	h	هکتو	10^{+2}
m	میلی	10^{-3}	k	کیلو	10^{+3}
μ	میکرو	10^{-6}	M	مگا	10^{+6}
n	نانو	10^{-9}	G	گیگا	10^{9}
p	پیکو	10^{-12}	T	ترا	10^{12}
f	فمتو	10^{-15}	P	پتا	10^{15}
a	آتو	10^{-18}	E	اگزا	10^{18}
z	زپتو	10^{-21}	Z	زتا	10^{21}

۳

چگالی: نسبت جرم جسم به حجم جسم را چگالی می‌گویند.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \frac{(kg)}{(m^3)} \quad \text{یا} \quad \frac{g}{cm^3}$$

ρ یا چگالی، m جرم، V حجم

مثال: $4kg$ آب دارای چه حجمی است؟

$$\rho_{\text{آب}} = 10^3 \, kg/m^3$$

$m = 4kg$

$\rho = 10^3 \, kg/m^3$

$V = ?$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{4}{10^3} = 4 \times 10^{-3} \, m^3$$

چگالی مخلوط:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}$$

یا

$$\rho = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \cdots + \frac{m_n}{\rho_n}}$$

یا

$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \cdots + \rho_n V_n}{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}$$

۲

مثال از تبدیل یکاها:

۱) $25\,m/s$ را برحسب km/h بنویسید؟

$$25\,m/s = \frac{25m}{1s} \times \frac{1Km}{1000m} \times \frac{3600s}{1h} = 90\,km/h$$

۲) مساحت $4m^2$ را برحسب cm^2 بنویسید؟

$$4\,m^2 = 4\,m^2 \times \left(\frac{100cm}{1m}\right)^2 = 4\times10^4\,cm^2$$

۳)

$$20nm \to ?\mu m \Rightarrow 20\cancel{nm} \times \left(\frac{10^{+6}\mu m}{\cancel{1m}} \times \frac{\cancel{1m}}{10^{9}\cancel{nm}}\right)$$

$$= 20\times10^{-3} = 2\times10^{-2}\,\mu m$$

۴) یک سال خورشیدی چند ثانیه است؟

۵) $8\,cm^3 \to ?\,nm^3$

۶) $70\,kg \to ?\,ngr$

۷) $3ns \to ?\,h$