Date: / / Subject:

روابط فوق مقادیر دقیق تنش نقطه‌ای را ارائه می‌کند که خود شیئاً نه واقعاً می‌معمولاً با مقادیر تنش متوسط کار می‌کنیم.

نکته: از آنجایی که هر صفحه با بردار نرمال آن (برداری که بر صفحه عمود است) معرفی می‌شود. اندیس اول این تنش را برعهده دارد و اندیس دوم جهت نیرو را نشان می‌دهد.

۱-۲ انواع تنش

بطور کلی تنش‌ها به ۲ دسته تقسیم می‌شوند:

① تنش قائم (محوری - نرمال). اگر نیرو عمود بر سطح مقطع وارد شود. ایجاد تنش محوری می‌کند. این تنش بالتوجه به جهت نیرو به ۲ نوع تبدیل می‌شود: ۱- محوری کششی ۲- محوری فشاری.

② تنش برشی: اگر نیرو موازی با مقطع بر شکل اعمال شود تولید تنش برشی می‌کند.

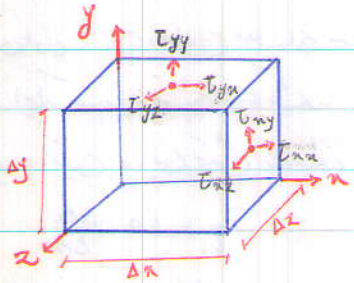
۱-۳ واحد تنش

از آنجاکه تنش نیروی وارد بر سطح است هر بار مقدار که صورت آن نیرو و مخرج آن سطح باشد به عنوان واحد تنش معرفی می‌شود.

N/m^2 پاسکال - N/mm^2 مگاپاسکال - t/m^2 - kg/cm^2

۱-۴ تانسور تنش

کلیه‌ی حالات محتمل تنش وارد بر یک جسم را تانسور تنش گویم.



$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

تانسور تنش

$\tau_{xx} \rightarrow \sigma_x$

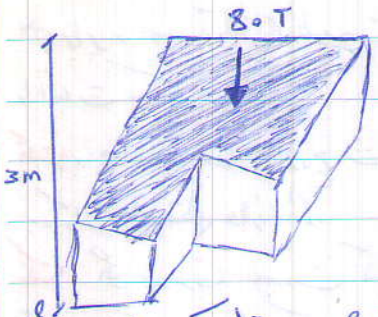
$\tau_{yy} \rightarrow \sigma_y$

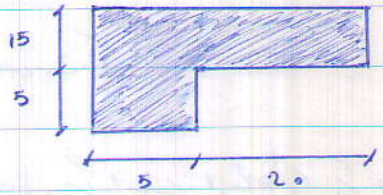
$\tau_{zz} \rightarrow \sigma_z$

تنش قائم

Date: / / Subject:

مثال: با توجه به شکل زیر:





الف- محل تاثیر بار 80 T را طوری محاسبه کنید که توزیع تنش در مقطع یکنواخت باشد.

ب- مقدار تنش حاصل از این نیرو را محاسبه کنید.

ج- آیا احتمال کمانش رخ می‌دهد.

جواب الف. این بار 80 T باید اینگونه توزیع تنش در آن یکنواخت باشد باید در مرکز سطح شکل وارد شود.

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(5\times5\times2.5)+(25\times15\times12.5)}{(5\times5)+(25\times15)} =$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(5\times5\times17.5)+(25\times15\times7.5)}{(5\times5)+(25\times15)} = 8.12 \text{ cm}$$

جواب ب.

$$\sigma = P/A = \frac{80\times10^3 \text{ kg}}{400} = 200 \text{ kg/cm}^2$$

جواب ج.

$$\frac{a_{min}}{L} < \frac{1}{10}$$

L ← طول عضو

کم‌ترین قطعات $\frac{5}{300}$ تیپ: cm

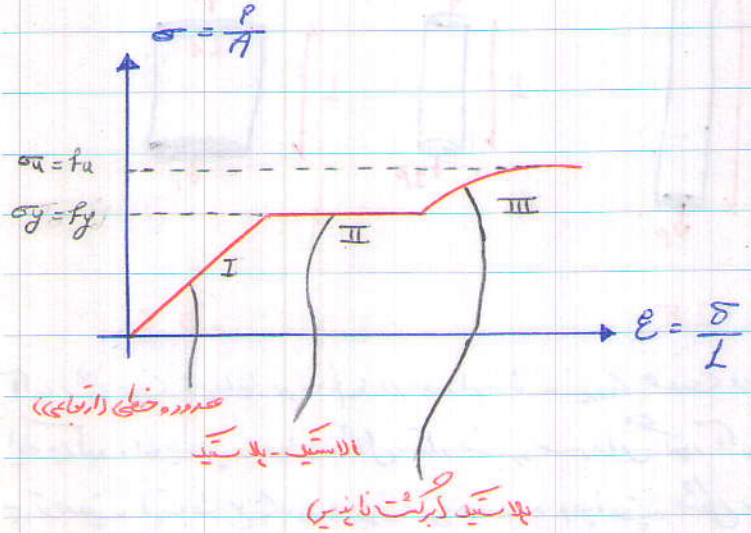
$$\frac{5}{300} < \frac{1}{10} \rightarrow 0.016 < \frac{1}{10}$$

* لاغر احتمال کمانش وجود دارد.

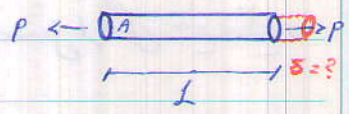
Date: / / Subject:

1-6 آزمایش کشش مستقیم در فولاد

آزمایش کشش مستقیم یکی از ساده‌ترین و مهم‌ترین آزمایش‌ها در مقاومت مصالح است. هدف از انجام این آزمایش، رسم نمودار تنش - کرنش برای یک ماده است. به همین منظور نمونه‌ای از ماده را تحت نیروی کششی P قرار داده و با افزایش تدریجی P طول میله L را در هر لحظه بدست می‌آوریم.
این نمودار را معمولاً از شروع بارگذاری تا لحظه شکستگی ماده رسم می‌کنند.



ناحیه‌ی هوک



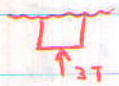
$\sigma = E\,\varepsilon$ ← ضریب ارتجاعی (بستگی به جنس دارد)

$$\frac{P}{A} = E \times \frac{\delta}{L} \rightarrow \frac{P}{A} = \frac{E\delta}{L} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

نیروی محوری — طول
تغییر طول محوری
ضریب ارتجاعی
سطح مقطع

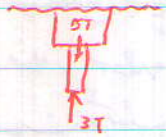
Date: / /

Subject:



$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow P_{1-1} + 3 = 0$

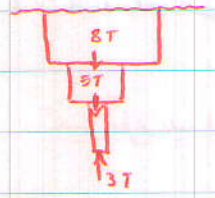
$P_{1-1} = -3t$



$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow P_{2-2} - 5 + 3 = 0$

$P_{2-2} = 5 - 3 = 2t$

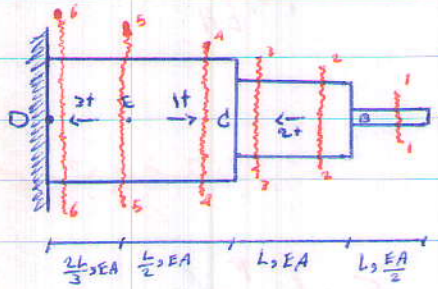
$P_{2-2} = 2t$



$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow P_{3-3} - 8 - 5 + 3 = 0$

$P_{3-3} = 10$

مثال: تغییر طول نقاط داده شده را بدست بیاورید.

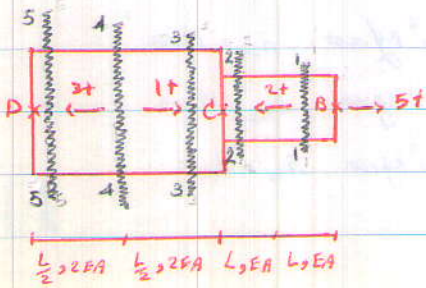


$L = \ell \qquad EA = 5 \times 10^7 \ kg/cm^2$

$$\sigma = \frac{PL}{EA}$$

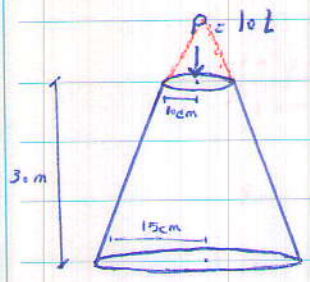
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i} = \frac{P_1 L_1}{(EA)_1} + \frac{P_2 L_2}{(EA)_2} + \frac{P_3 L_3}{(EA)_3} + \frac{P_4 L_4}{(EA)_4} + \frac{P_5 L_5}{(EA)_5} + \frac{P_6 L_6}{(EA)_6}$$

$$\sigma_A = \frac{5\times10^3 kg \times 200}{25\times10^7} + \frac{5\times10^3 \times 200}{5\times10^7} + \frac{3\times10^3 \times 200}{5\times10^7} + \frac{3\times10^3 \times 100}{100\times10^7} + \frac{4\times10^2 \times 100}{100\times10^7} + \frac{1\times10^3 \times 100}{100\times10^7} = ?$$



Date: / / Subject:

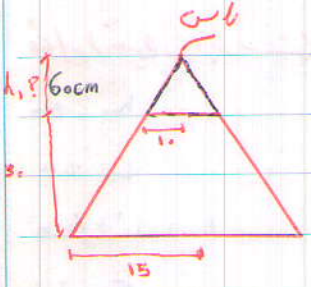
مثال: در مخروط ناقص زیر تغییر شکل ناشی از وزن خودش را حساب نمایید.



$E = 2 \times 10^6 \ kg/cm^2$ $\delta = \int \frac{P dx}{EA_x}$

حل: با توجه به شکل که سطح مقطع آن با x تغییر می‌کند پس تغییر شکل در حالت پیوسته است.

ابتدای سازه‌ی کار ناشی از وزن مخروط ناقص را تشکیل می‌دهیم.



$$\frac{15}{10} = \frac{30+h_1}{h_1} \Rightarrow 15h_1 = 300 + 10h_1$$

$$5h_1 = 300$$

$$h_1 = 60cm$$

اکنون را به شعاع r_x انتخاب می‌کنیم (برای پیدا کردن A_x و جابجایی آن دفرمول).

$$\frac{r_x}{10} = \frac{x}{60} \Rightarrow r_x = \frac{10x}{60} \qquad r_x = \frac{x}{6}$$

مساحت دایره $A_{cx} = \pi r_x^2 = \pi \left(\frac{x}{6}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{36}$

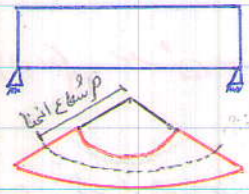
$$\delta_B = \int_{60}^{90} \frac{P dx}{EA_x} = \int_{60}^{90} \frac{10 \times 10 \, dx}{2 \times 10^6 \times \frac{\pi x^2}{36}} = \int_{60}^{90} \frac{10 \times 10^3 \times 36}{2 \times 10^6 \times \pi x^2} dx = \int_{60}^{90} \frac{36 \times 10^{-3}}{2 \times \pi} x^{-2} dx =$$

تبدیل به kg

$$\int_{60}^{90} 0.05 \, x^{-2} dx = 0.05 \int_{60}^{90} x^{-2} dx = x^{-2+1} \Big|_{60}^{90} =$$

Date: / / Subject:

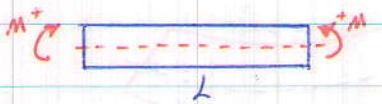
3) شعاع انحنا حاصل از خمشی بسیار بزرگ است هرچه انحنا بیشتر باشد شعاع انحنا کوچک تر است.



شعاع انحنا ρ — انحنا $\frac{1}{\rho}$

4) از اثر برشی که معمولاً در کنار خمشی وجود دارد برای تیرهای با ارتفاع کم صرف نظر کنیم.

5) فرض می کنیم که تغییر شکل های حاصل از خمشی در ارتفاع مقطع بصورت خطی تغییر کند یعنی (بر قراری قانون هوک $\sigma = E \cdot \varepsilon$).

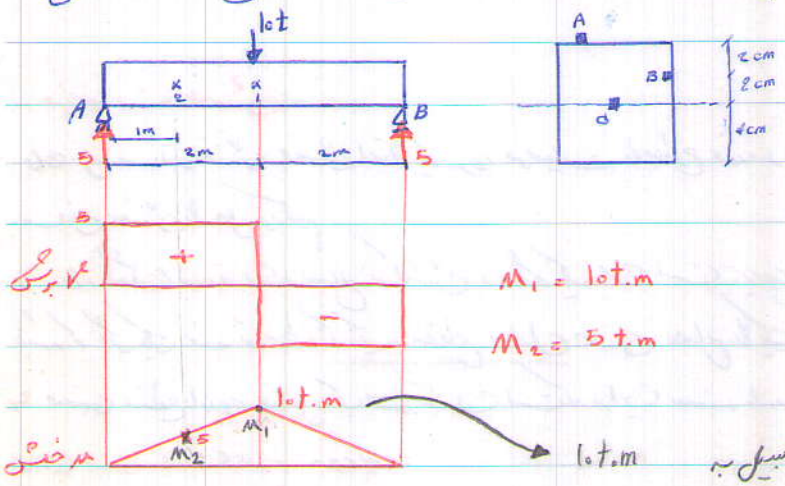


فاصله نقطه مورد نظر تا تار خنثی — لنگر خمشی

$$\sigma = f(M) = \frac{M \cdot y}{I_m}$$

تنش خمشی — ممان اینرسی مقطع حول مرکز سطح

مثال: مطلوبست محاسبه تنش خمشی در نقاط 1 و 2 تیر و در تارهای A.B.C مقطع.



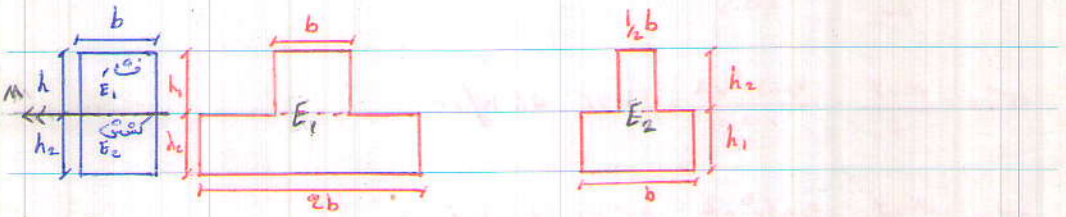
$$I_m = \frac{bh^3}{12} = \frac{5 \times 8^3}{12} = 213.33\ m^4$$

Date: / / Subject:

2) محور خنثی مقطع معادل را تعیین و مکان آنرسی را نسبت به تار خنثی محاسبه می‌کنیم.

3) تنش در ارتفاع مقطع به کمک رابطه $\sigma = \frac{M_0 \cdot y_{max}}{I}$ تعیین می‌کنیم.

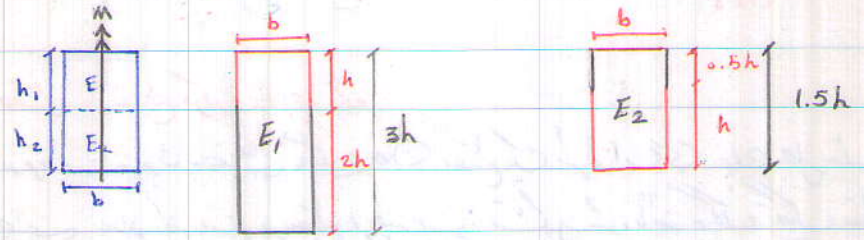
4) برای رسیدن به مقادیر واقعی تنش، تنش‌ها را در نسبت‌هایی مثل $\frac{e_2}{e_1}$ و $\frac{e_3}{e_1}$ و ... ضرب می‌کنیم. (e_1 مادی مبنا است)



$E_2 = 2E_1$

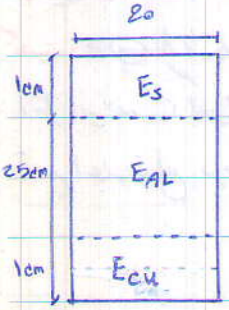
ضریب تبدیل $= \frac{E_2}{E_1} = \frac{2E_1}{E_1} = 2$

$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_1}{2E_1} = \frac{1}{2}$



$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2E_1}{E_1} = 2$

مثال: اگر لنگر خنثی وارد بر مقطع 5t.m باشد مطلوبست حداکثر تنش در فولاد، مس و آلومینیوم با بدست آورید.

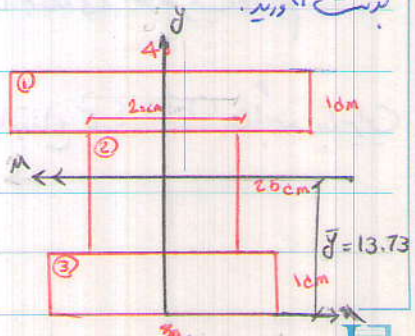


$E_S = 2 \times 10^7 \ kg.cm^2$

$E_{AL} = 1 \times 10^7 \ kg.cm^2$

$E_{Cu} = 1.5 \times 10^7 \ kg.cm^2$

$M = 5t.m$



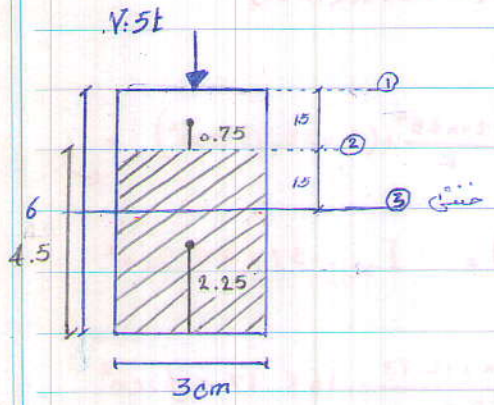
سطح نسبت به محور x متقارن است پس $\bar{x} = 0$.

Date: / / Subject:

$A \cdot \bar{y} = Q$ ← فاصله‌ی مرکز سطح مورد نظر تا تار خنثی

سطح مقطع

مثال: تنش برشی در تارهای تعیین شده در شکل زیر محاسبه نمایید.



$\tau = \frac{VQ}{I.t} = \frac{V_a(A.\bar{y})}{I.t}$

$I_x = \frac{bh^3}{12}$ *

بالای تار ۱: $\frac{5\times10^3 kg \times (0\times\bar{y})}{\quad} = 0$

پایین تار ۱: $\frac{5\times10^3 kg \times (18\times0)}{\quad} = 0$

$\tau_2 = \frac{V_a(A.\bar{y})}{I_x.t} = \frac{5\times10^3 \times (3\times1\times2.25)}{\frac{3\times6^3}{12} * 3^*} = 312.5 kg$

$\tau_3 = \frac{V_.(A.\bar{y})}{I_m.t} = \frac{5\times10^3 kg \times (3\times3\times1.5)}{\frac{3\times6^3}{12} * 3} = 416.66 kg$

۲ نکته‌ی مهم:

۱- تنش برشی در دورترین فاصله تا تار خنثی صفر است. (عکس تنش خمشی)

۲- تنش برشی برای مقاطعی که عرض یا ضخامت آن ثابت است یا با حرکت به طرف تار خنثی از هر ۲ طرف (عرض یا ضخامت) کم شود برروی تار خنثی بیشترین مقدار است.

Date: / /

Subject:

$$\tau_1 = \frac{15\times10^3 \times(-\bar{y})}{It} = 0$$

$$\tau_2 = \frac{15\times10^3\times(1\times25\times15.5)}{13816.7\times25} = 16.8\ kg/cm^2$$

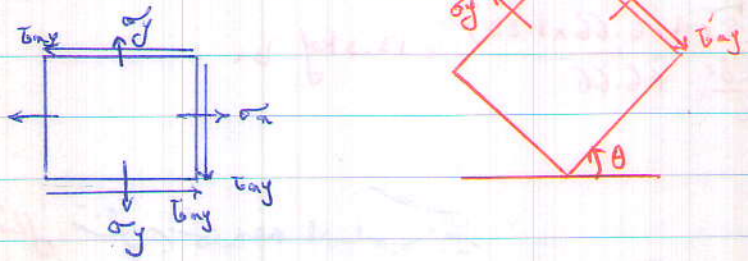
$$\tau_3 = \frac{15\times10^3(1\times25\times15.5)}{13816.7\times0.8} = 525.86\ kg/cm^2$$

$$\tau_4 = \frac{15\times10^3\times[(15\times0.8\times7.5)+(1\times25\times15.5)]}{13816.7\times0.8} = 648\ kg/cm^2$$

فصل چهارم - تعیین تنش و کرنش (ماتریس مود)

تبدیل تنش صفحه‌ای:

فرض کنید المانی بصورت زیر داده شده باشد و مولفه‌های σ_x ، σ_y ، τ_{xy} مربوط کوچک نشان داده شده بدست آمده است. حال اگر این المان تحت دوران (خلاف عقربه‌های ساعت) همراه با تنش بدست آمده بصورت مقابل در آید داریم:



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\cos(2\theta) + \tau_{xy}\sin(2\theta)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\cos(2\theta) - \tau_{xy}\sin(2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin(2\theta) + \tau_{xy}(2\theta)$$

Date: / /

Subject:

مفهوم کلی فرمول‌ها به صورت:

1, $\tau_{max} = R$

2, $\tau_{min} = -R$

3, $\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$

4, $\sigma_{min} = \sigma_c - R$

5, $\sigma_{max} = \sigma_c + R$

6, $2\theta_P + 2\theta_S = 90 \xrightarrow{\div 2} \theta_P + \theta_S = 45^\circ$

7, $\theta_P = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$

8, $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Date: / / Subject:

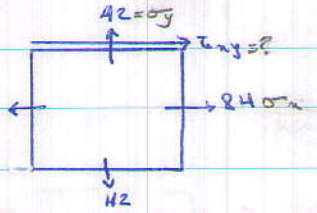
$\tau_{max} = R = 50$

$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 50}{2} = 0$

$\sigma_{min} = \sigma_c - R = 0 - 50 = -50$

$2\theta_s = 90 \rightarrow \theta_s = 45 \Rightarrow \theta_P = 0$

مثال: در المان مقابل تنش اصلی (σ_{min}) برابر با 28 است تنش اصلی max و تنش برشی τ را بدست آورید.



$\sigma_{max} - \sigma_c = R$

$= 63 + 35 = 98$

$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{84 + 42}{2} = \frac{126}{2} = 63$

$\sigma_{min} = \sigma_c - R$

$28 = 63 - R \rightarrow R = 63 - 28 = 35 = \tau_{max}$

$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$35 = \sqrt{\left(\frac{84 + 42}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$1225 = 441 + \tau_{xy} \rightarrow 784 = \tau_{xy}^2 \rightarrow \tau_{xy} = \sqrt{784} = \underline{28}$

Date: / /

Subject: