دانشگاه فنی و حرفه ای

جزوه استاتیک

آقای مهندس جمالی

آموزشکده فنی و حرفه ای یسران بروجرد

Date: / /

Subject:

استاتیک

علم مکانیک: اجسامی که در اثر اعمال نیرو و یا تغییر شکل نمی‌شوند. → اجسام صلب

فصل ۱: صفحه (۲ بُعدی) $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M = 0$

۱) معادلات تعادل

فضا (۳ بُعدی)

$\sum F_x = 0$ $\sum M_x = 0$

$\sum F_y = 0$ $\sum M_y = 0$

$\sum F_z = 0$ $\sum M_z = 0$

۲) بردار: پاره‌خطی است که سر و دُم دارد. مقدار، جهت، راستا.

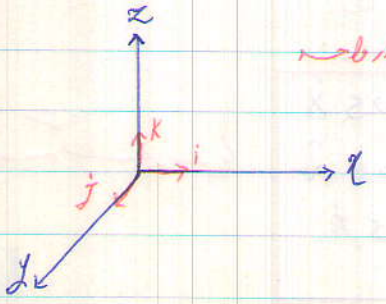
۳) برابری و هم عرضی ۲ بردار. اگر مقدار و جهت ۲ بردار مساوی باشد می‌گوییم ۲ بردار برابرند. در استاتیک ۲ بردار مساوی با هم - با هم هم راستا نیز می‌باشند. اگر نقطه واثر ۲ بردار یکی باشد گوییم ۲ بردار هم عرض می‌باشد (برابری طول - هم جهت بودن).

۴) خط حامل بردار: هر بردار روی خطی سوار است. که به آن خط حامل بردار می‌گوییم لازم به ذکر است که هر بردار می‌تواند روی خط حامل خود با همان جهت و راستا جابجا شود.

۵) کمیت: هر پارامتری که قابل اندازه‌گیری باشد کمیت نامیده می‌شود.

دو نوع کمیت نیز یک داریم: ۱) اسکالر ۲) برداری

- عملیات بر روی بردارها. بردار واحد i, j, k



Date: / / Subject:

۳ ضرب بردارها: داخلی یا عددی (اسکالر): خروجی آن فقط یک عدد است. داخل A.B

خارجی یا برداری: خروجی آن هم وقتی اندازه مقدار باشد هم بردار. کراس A*B

- داخلی:

$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\theta$ → زاویه بین 2 بردار

$A.B = (a_1.b_1) + (a_2.b_2) + (a_3.b_3)$

- خارجی:

$|\vec{A}*\vec{B}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\sin\theta$

بردار حاصل ضرب خارجی بر صفحه تشکیل دهنده 2 بردار هم واره عمود است.

جهت آن را از قانون دست راست بدست می‌آید.

$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\vec{A}*\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}_{3\times3}$ = دترمینان

$= (a_2.b_3 - a_3.b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3.b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$

* سطر اول را که همیشه بی خیال می‌شیم بعد ستون اول - سطر اول ستون دوم - سطر اول ستون سوم

* علامت بین پرانتز 2 ابتدا مثبت و بعد منفی می‌شود.

چند ویژگی مهم از ضرب برداری:

Date: / / Subject:

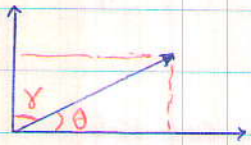
$\theta(A \cdot B) = \quad A \cdot B = |A| \cdot |B| \cdot \cos\theta$

$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$ $\quad -4 = (\sqrt{14}) \cdot (\sqrt{11}) \cdot \cos\theta$

$|\vec{B}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

$\cos\theta = \frac{-4}{(\sqrt{14})(\sqrt{11})} \rightarrow \theta = \cos^{-1} = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}} < 108.8^\circ$

تجزیه بردارها: (عقط برای بردارای مورب است)



$\cos\theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه } \theta}{\text{وتر}} = \cos\theta = \frac{F_x}{\vec{F}} \Rightarrow \boxed{F_x = F \cdot \cos\theta}$

$\sin\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{F_y}{F} \rightarrow \boxed{F_y = F \cdot \sin\theta}$

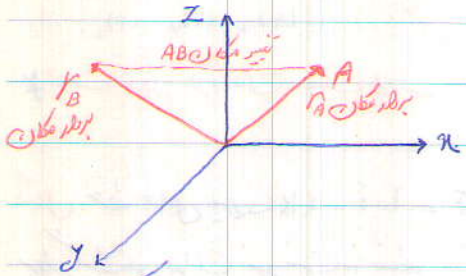
$\vec{F} = (F_x)\hat{i} + (F_y)\hat{j} \rightarrow \boxed{|F| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}}$

$\vec{F} = (F\cos\theta)\hat{i} + (F\sin\theta)\hat{j}$ $\quad \tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)}$

Date: / / Subject:

3-1 کمیت ها در استاتیک

1) بردار مکان: برداری است که مبدا به نقطه مورد نظر وصل می شود



2) بردار تغییر مکان (جابجایی): برداری که ابتدای حرکت را به انتهای حرکت متصل می کند.

$$\vec{r_A} + \vec{AB} = \vec{r_B} \qquad \vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$$

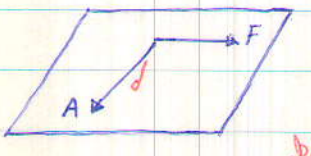
چون B اول نوشته شده، * B اول می آید.

3) بردار گشتاور

نیروی دو عامل روی جسم می گذرد: 1) حرکت 2) دوران

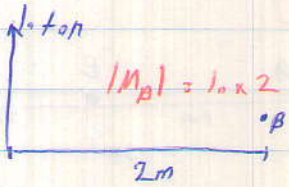
(لنگر) بردار گشتاور $\vec{M}$ ← خروج از مرکزیت ← دوران

بردار گشتاور: نقطه / محور



$|M| = F \cdot d$

مقدار بردار گشتاور



$|M_B| = 10 \times 2 = 20$

فاصله × نیرو = گشتاور

* اگر نیرو افقی باشد ← فاصله تا نقطه عمودی است
* اگر نیرو عمودی باشد ← فاصله تا نقطه افقی است

Date: / / Subject:

$$\underline{M_A} = (\underline{\vec{AB}} \times \vec{F_1}) + (\underline{\vec{AE}} \times \vec{F_2}) + (\underline{\vec{AC}} \times \vec{F_3})$$

A: $\vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = 6i \longrightarrow \vec{AB} = 6i$

B: 4

E: 8, -3, 0 $\quad \vec{AE} = \vec{r_E} - \vec{r_A} = 8i - 3j \rightarrow AE = 8i - 3j \qquad F_1 = -10j$

C: 8, 0, 0 $\quad AC = r_C - r_A = 8i \longrightarrow AC = 8i \qquad F_2 = 4i$

$F_3 = 8j$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$M_A = [(0-0)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (-60-0)\hat{k}] + [(0-0)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (0-(-12))\hat{k}] +$$

$$[(0-1)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (16-0)\hat{k}] = -60k + 12k + 64k = +16\hat{k}$$

$$M_A = 16k \longrightarrow |\vec{M_A}| = \sqrt[2]{16^2} = 16$$

* از طریق بردارها:

$$|M_A| = (10 \times 6) - (4 \times 3) - (8 \times 8) = 60 - 12 - 64 = -16$$

$$6i \times (-10j) = -60k$$

$$(-8i - 3j) \times (4j) = 32\hat{i} + 12k$$

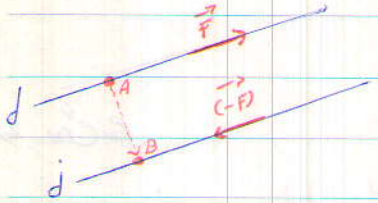
$$8i \times (8j) = 64\hat{k}$$

Date: / / Subject:

1.4. کوپل (زوج نیرو)

2 نیرو هم اندازه، متوازی و هم راستا و مختلف الجهت که روی خط عامل های جدا گانه نباشند.

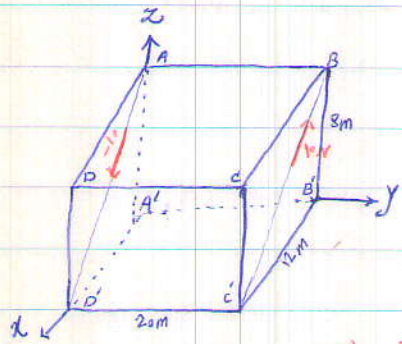
اثر زوج نیرو بر روی اجسام صلب فقط یک "گشتاور" است.



$$\vec{M} = \vec{AB} \times (-\vec{F})$$

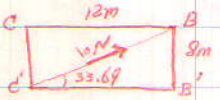
$$\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}$$

مثال: در شکل نشان داده شده گشتاور زوج نیرو را محاسبه کنید.



* به ۲ روش قابل حل است.

روش اول: تجزیه. $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$ $AB = B - A = 20j$



$A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{vmatrix}$ $B \begin{vmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\tan\alpha = \frac{8}{12} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8}{10}\right) = 33.69$$

$$F_x = F\cos\alpha = 10\cos 33.69$$

$$F_z = F\sin\alpha = 10\sin 33.69$$

Date: / / Subject:

$\vec{AC} = r_C - r_A = 0.3\hat{i} + 0.0\hat{j} + 0.8\hat{k}$ $\quad AC = 0.3\hat{i} + 0.0\hat{j} + 0.8\hat{k}$

الف) $M_A = ?$ $\quad M_A = AC \times \vec{F}$

$CD = r_D - r_C = -0.3\hat{i} + 0.24\hat{j} - 0.16\hat{k}$

$|\vec{CD}| = \sqrt{(0.3)^2 + (0.2)^2 + (-0.16)^2} = \sqrt{0.09 + 0.06 + 0.02} = 0.38$

$\lambda_{\vec{CD}} = \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = \frac{-0.3\hat{i} + 0.24\hat{j} - 0.16\hat{k}}{0.38} = -0.79\hat{i} + 0.63\hat{j} - 0.42\hat{k}$

$\vec{F} = \lambda_{\vec{CD}} \times |\vec{F}| \xrightarrow{200} F = -158\hat{i} + 126\hat{j} - 84\hat{k}$ ☆

$$M_A = AC \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.3 & 0 & 0.8 \\ 158 & 126 & -84 \end{vmatrix}$$

F و از قبل بدست آمده است.

$M_O = \vec{OC} \times \vec{F}$ ☆ $\quad OC = r_C - r_O = 0.3\hat{i} + 0.4\hat{k}$

$$M_O \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.3 & 0 & 0.4 \\ -158 & 126 & -54 \end{vmatrix}$$

Date: / / Subject:

نکته: هرگاه اندازه یک بردار برای ما معلوم باشد و ما بخواهیم آن را حساب کنیم ابتدا باید در راستای خط حامل نیرو 2 نقطه A و B را انتخاب کرد.

مثلاً A و B و بردار جابجایی AB بست آوردیم. $(r_B - r_A)$ پس اندازه بردار AB نابست می آوریم و پس بردار AB تقسیم بر اندازه بردار |AB| می کنیم.

تا λ_{AB} الانا بست آمد و در آخر λ_{AB} را در اندازه بردار ماده شده ضرب می کنیم.

. حاصل کار همان بردار نیرو است.

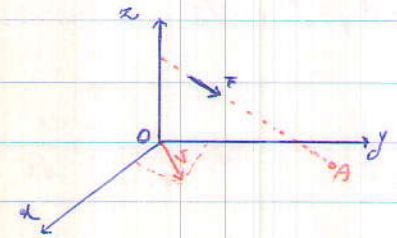
$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} \qquad F = (\lambda_{AB}) \cdot F$$

مثال: مطلوبت محاسبه گشتاور نیروی $F = 100i + 200j - 500k$ نسبت به:

الف) مبدا O

ب) نیم ساز صفحه ی XOY خط حامل نیرو F از نقطه A(5, -2, 4) عبور کرده.

ج) بردار گشتاور این نیرو نسبت به مبدا مختصات نیز محاسبه کنید.



$$F = 100\hat{i} + 200\hat{j} - 500\hat{k}$$

$$A\begin{vmatrix}5\\-2\\4\end{vmatrix}$$

ج) $\vec{M}_O = \vec{O_A} \times \vec{F}$

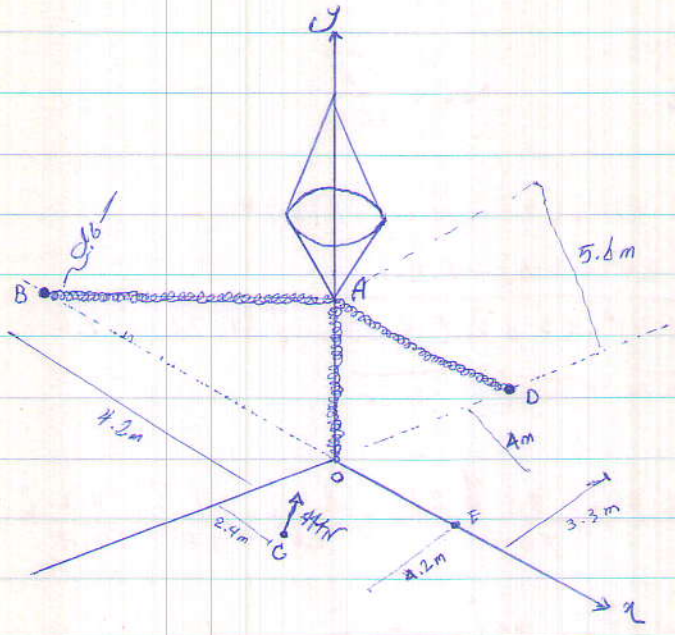
$$OA = r_A - r_O = (5-0)\hat{i} + (-2-0)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$$

$$= \vec{OA} = 5i - 2j + 4k$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -2 & 4 \\ 100 & 200 & -500 \end{vmatrix} = [1000 - 800]\hat{i} - [-2500 - 400]\hat{j} - [1000 - (-200)]\hat{k}$$

Date: / / Subject:

مثال: بالنی مطابق شکل بسه کابل به زمین بسته شده است. اگر نیروی P در شکل برابر 444 N کشتاور این نیرو را نسبت به محور داده شده در زیر محاسبه نمایید.



الف) کشتاور نیروی P نسبت به مبدأ مختصات محاسبه کنید.

ب) برآیند کشتاور نیرو نسبت به نقطه d محاسبه کنید.

ج) برآیند کشتاور نسبت به AB محاسبه کنید.

د) برآیند کشتاور نسبت به محور OA محاسبه کنید.

Date: / /

Subject:

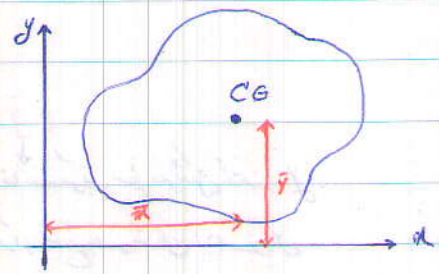
این چون روی خط حامل، عقب برگرد یا دور برگردان است.

اگر نیرو را از روی خط حامل خود جابجا کنیم روی خط حامل دیگر انتقال دهیم، یک لنگر می‌گیرد.

فصل دوم — مرکز سطح - مرکز ثقل یا مرکز جرم

تعریف: مرکز جرم نقطه‌ای است که بر اثر نیروی وزن ذرات جسم در آن نقطه متعادل باشد.

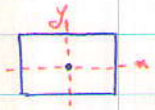
تک تک ذرات جسم باشد.



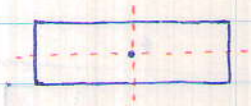
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

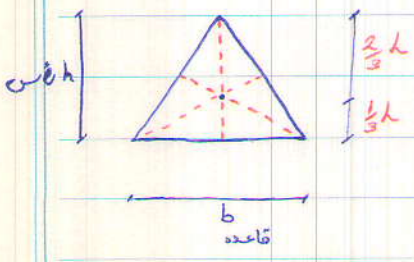
هدف پیدا کردن مرکز سطح سطوح مرکب: (مرکز سطح سطوح منتظم)

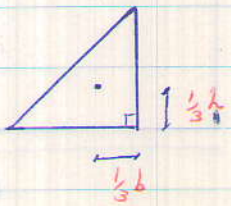


a^2



طول × عرض





1/2 قاعده × ارتفاع

Date: / / Subject:

روش اول

شکل	مساحت A_i	$\bar{x}$	$\bar{x}_i A_i$	$\bar{y}$	$\bar{y}_i A_i$
شکل ۱	$4\times4=16$	2	32	2	32
شکل ۲	$2\times1=2$	5	10	0.5	1
Σ	18	–	42	–	33

$\bar{x}$ = نقطه مساحت در x

$\bar{y}$ = نقطه مساحت در y

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{42}{18} = 2.33$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{33}{18} = 1.83$$

روش دوم

$$\bar{x} = \frac{(4\times4\times2)+(2\times1\times5)}{(4\times4)+(2\times1)} = 2.33$$

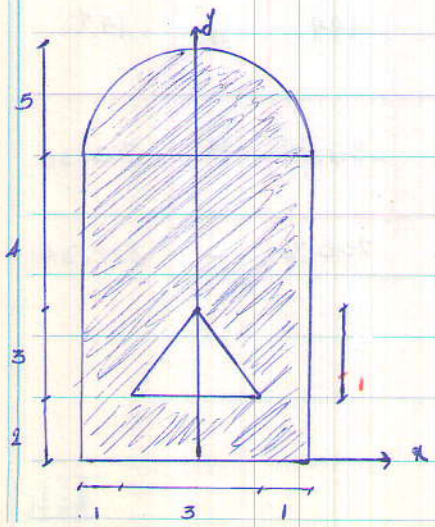
$$\bar{y} = \frac{(4\times4\times2)+(2\times1\times0.5)}{(4\times4)+(2\times1)} = 1.83$$

روش سوم

$$\bar{x} = \frac{(4\times6\times3)\ominus(2\times3\times5)}{(4\times6)\ominus(2\times3)} = \frac{72-30}{24-6} = \frac{42}{18} = 2.33$$

$$\bar{y} = \frac{(4\times6\times2)\ominus(2\times3\times2.5)}{(4\times6)\ominus(2\times3)} = \frac{48-15}{18} = \frac{33}{18} = 1.83$$

مثال: مرکز سطح شکل نشان داده شده را بدست آورید.



- چون شکل نسبت به محور y متقارن است $\bar{x}=0$

Date: / Subject:

فصل سوم — تعادل - محاسبه ی عکس العمل ها در تکیه گاهی

تکیه گاه، عاملی است که جلوی حرکت را می گیرد.

انواع عکس العمل ها در تکیه گاهی:

1) ✓ تکیه گاه غلطکی

* اجازه حرکت در راستای عمود را ندارد.
* اجازه حرکت در راستای افق را دارد.
* دوران (چرخش - شیب) دارد.
R=1

2) ✓ تکیه گاه مفصلی

* اجازه حرکت در راستای عمود را ندارد.
* اجازه حرکت در راستای افق را ندارد.
* اجازه دوران دارد.
R=2

3) ✓ تکیه گاه گیردار

* اجازه حرکت در راستای عمود را ندارد.
* اجازه حرکت در راستای افق را ندارد.
* اجازه دوران ندارد.
R=3

4) تکیه گاه غلطکی شده (مفصل برشی)

* اجازه جابجایی در راستای عمود را دارد. (V)
* اجازه جابجایی در راستای افق را ندارد.
* اجازه دوران ندارد.
R=2

5) تکیه گاه تکیه ای

* اجازه حرکت در راستای عمود را ندارد.
* اجازه حرکت در راستای افق را دارد.
* دوران ندارد.
R=2

6) تکیه گاه فنر قائم

R=1

7) تکیه گاه فنر پیچشی

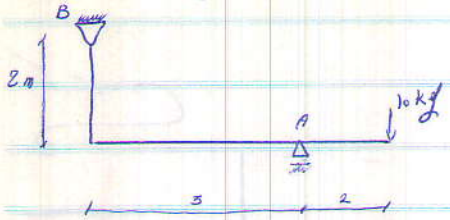
R=1

انواع معادلات تعادل

الف) در سطح (2)
$\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ ، $\sum M = 0$

ب) در فضا (3)
$\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ ، $\sum F_z = 0$
$\sum M_x = 0$ ، $\sum M_y = 0$ ، $\sum M_z = 0$

Date: / / Subject:



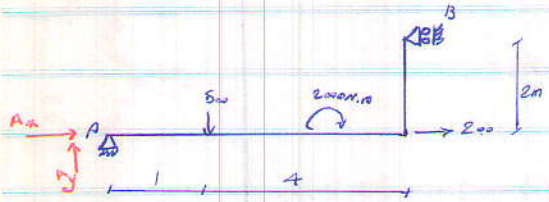
$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$

$\sum M = 0 \rightarrow 10 \times 5 = A_y \times 3$

$50 = 3A_y \quad \frac{50}{3} = 16.66$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow B_y + 16.66 - 10 = 0$

$B_y = 10 - 16.66 \rightarrow \boxed{B_y = -6.66}$ ↓



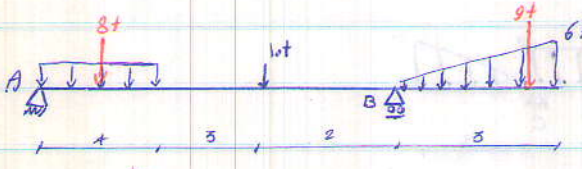
$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 500 = 0 \quad A_y = 500$

$\sum M_B = 0 \rightarrow (500 \times 1) + (B_M \times 2) - 2000 = 0$

$B_M = 1250 N$

$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + 200 - 1250 = 0$

$A_x = 1250 - 200 = 1050 \rightarrow A_x = 1050 N$



$6 \times 3 \div 2 \rightarrow$ مثلث

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

$\sum M_B = 0 \rightarrow (8 \times 2) + (10 \times 7) + (9 \times 11) = B_y \times 9$

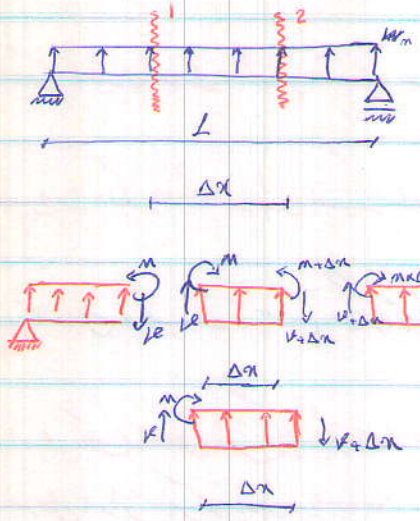
$16 + 70 + 99 = 9B_y$

$185 = 9B_y \rightarrow B_y = 20.55t$

$+\uparrow \sum F_y = A_y - 8 - 10 - 9 + 20.55 = 6.45t \rightarrow A_y = 6.45t$

Date: / / Subject:

رسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی:



$\Delta x \to 0 \longrightarrow \Delta x \sim dx$

$\Delta V \to 0 \longrightarrow \Delta V \sim dV$

$\Delta M \to 0 \longrightarrow \Delta M \sim dM$

$\sum F_y = 0 \longrightarrow V + w_x \cdot \Delta x - (V - \Delta V) = 0$

$V + w_x \cdot \Delta x - V - \Delta V = 0$

$* \quad w_x \cdot \Delta x = \Delta V$

$w_x = \frac{\Delta V}{\Delta x}$ ①

$\int_{V_1}^{V_2} w_x \cdot dx = V_2 - V_1$ ②

$\alpha = \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx}$ ③

$\Delta x \cdot V - \Delta M = 0 \longrightarrow \Delta M \cdot V = \Delta M$ **

$\int_{M_1}^{M_2} V \cdot dM = M_2 - M_1$ ④

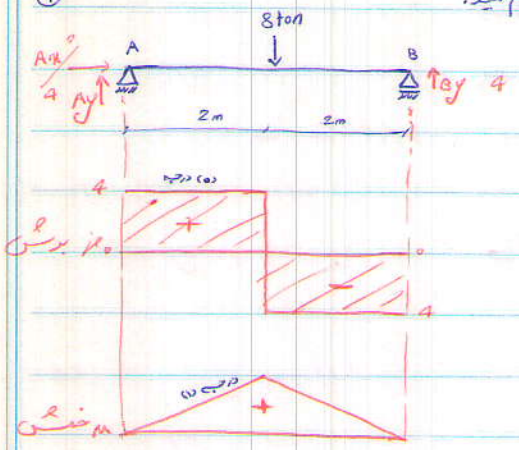
تفسیر رابطه ۴:

با مشتق یابی نسبت به طول تیر برابر است با شدت بار گسترده وارد بر تیر.

Date: / Subject:

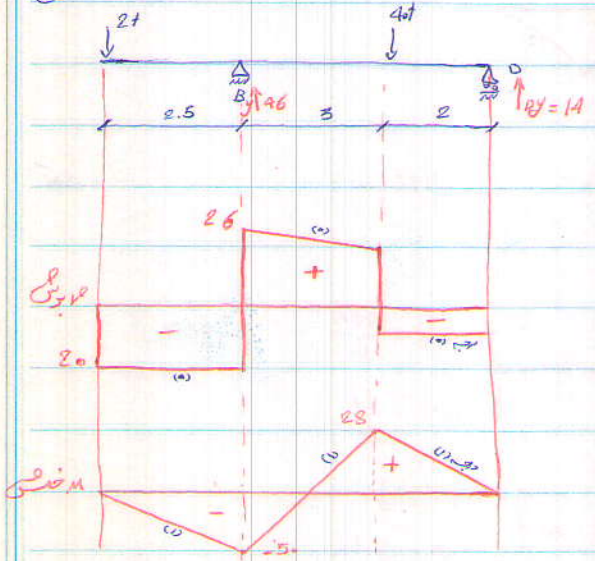
مثال: دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیرهای زیر را رسم کنید.

①



* چون نیرو متمرکز در وسط تیر شکل گرفته است نیروی برشی دو قسمت الف و ب تشکیل می‌شود.

②



$\sum M_B = 0 \rightarrow$

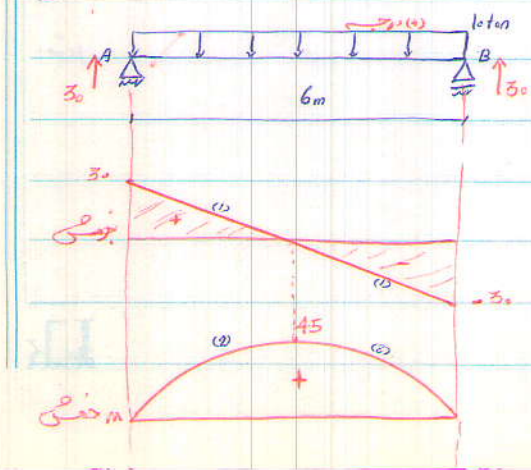
$40 \times 3 = DY \times 5 + (20 \times 2.5)$

$120 = 50 + 5DY \Rightarrow DY = 14$

$\sum fy = 0 \rightarrow -20 + BY - 40 + 14 = 0$

$BY = 60 - 14 = 46 \quad BY = 4y$

③



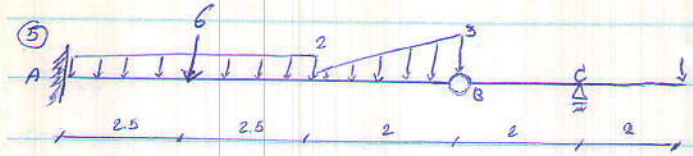
مساحت بار ← برشی

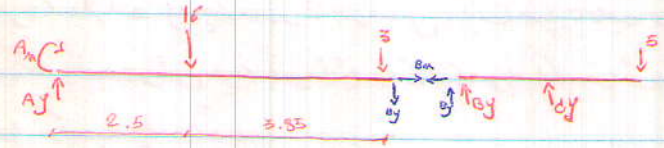
مساحت برشی ← خمش

Date: / /

Subject:

⑤





② ①

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow Ay - 16 - 3 + 5 = 0$

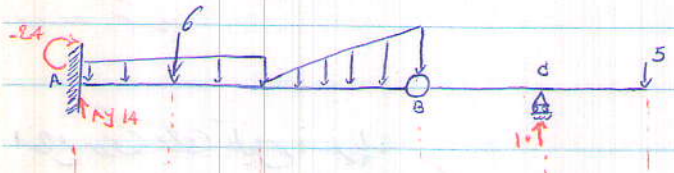
$Ay = 14$

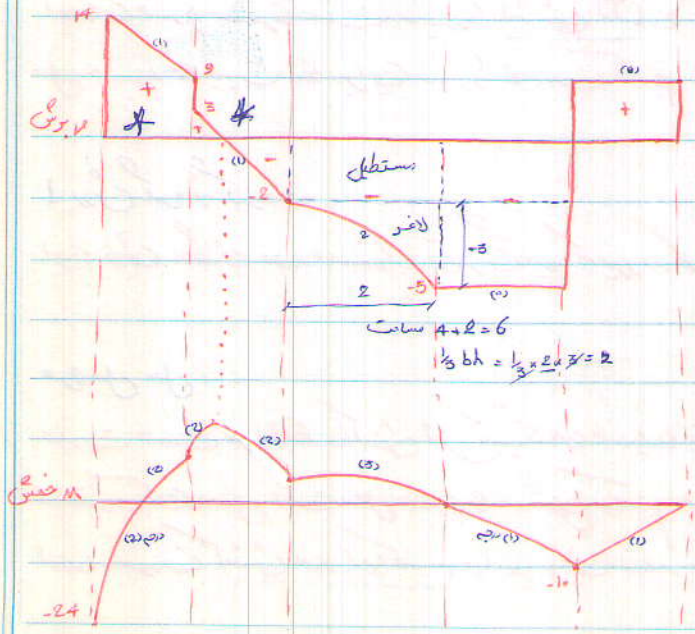
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow Bx = 0$

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow Cy \times 2 = 5 \times 4 = 0 \quad Cy = 10$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow By + 10 - 5 = 0 \quad By = -5 \uparrow$ (⊕)

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow MA + (16 \times 2.5) + (3 \times 6.33) = 5 \times 7 \quad M = -24\,t$





★ مساحت ذوزنقه

$\frac{\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک}}{2} \times \text{ارتفاع}$

★

3 x

2 2.5-x

$2x = 7.5 - 3x$

$5x = 7.5 \rightarrow x = 1.5$

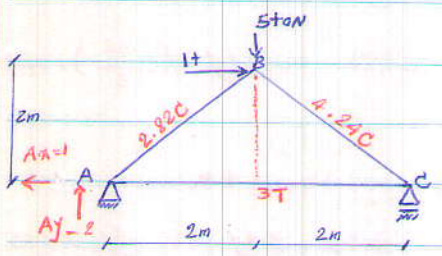
یا

$\frac{\text{برش}}{\text{شدت بار گسترده}} = \frac{3}{2} = 1.5$

Date: / / Subject:

مفهوم آن اینست که جهت مفروضه صحیح است و چنانچه مقدار نیروی در عضو مثبت بدست آمد مفهوم آن اینست عضو تحت کشش قرار دارد.

مثال: نیروهای کلیدی اعضاء و عرضهای نیرها محاسبه کنید.



$\sum fx = 0 \rightsquigarrow Ax + 1 = 0 \rightsquigarrow Ax = -1$

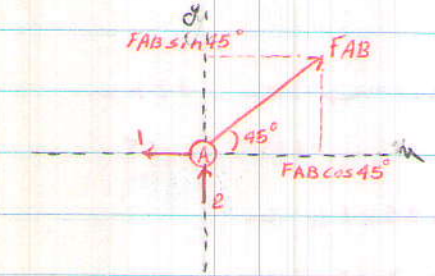
$\sum MA = 0 \rightsquigarrow (1\times 2) + (5\times 2) = Cy \times 4$

$12 = 4Cy \rightsquigarrow Cy = 3t$

$\sum fy = 0 \rightsquigarrow Ay - 5 - 3 = 0 \rightsquigarrow Ay = 2$

گره A را باز می‌کنیم

$\tan\alpha = \frac{2}{2} = 1$



$\sum fx = 0 \rightsquigarrow FAB\cos 45^\circ - 1 + Fac = 0$

$\sum fy = 0 \rightsquigarrow FAB \sin 45^\circ + 2 = 0$

$FAB \sin 45 = -2$

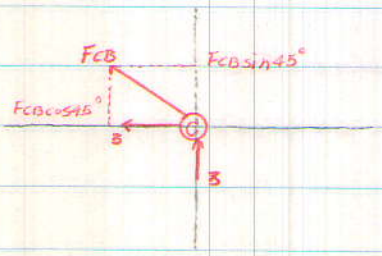
$FAB = \frac{-2}{\sin 45} = \frac{-2}{0.707} = -2.82\,C$ فشاری

$-2.82\cos 45^\circ - 1 + FAC = 0$

$FAC = (2.82\cos 45) + 1$

$FAC = 2.99 \simeq 3ton$ T کششی

گره C را باز می‌کنیم



$\sum fy = 0 \rightsquigarrow FCB\sin 45 + 3 = 0$

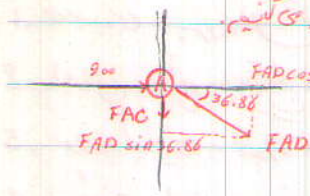
$FCB \sin 45^\circ = -3$

$FCB = \frac{-3}{\sin 45} = -4.24\,C$ فشاری

Date: / /

Subject:

گره A را بازی می‌کنیم.



$\leftarrow F_x = 0 \rightarrow 900 + FAD \cos 36.86 = 0$

$FAD \cos 36.86 = -900$

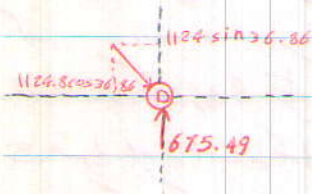
$FAD = \frac{-900}{\cos 36.86} = -1124.85$

$\uparrow F_y = 0 \rightarrow -FAC + 1124.8 \sin 36.86 = 0$

$1124.8 \sin 36.86 = FAC$

$FAC = 674.75$

گره D را بازی می‌کنیم.



$\leftarrow F_x = 0 \rightarrow -FCD + (1124.85 \cdot \cos 36.86) = 0$

$(1124.85 \times \cos 36.86) = FCD \rightarrow 899 \simeq 900\ T$

نکته: اعضای صفر نیرویی در خرپا.

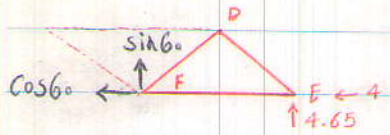
1/ از یک مفصل فقط دو عضو بگذرد و زاویه بین 2 عضو هر زاویه‌ای باشد به غیر از 180° و بار هم روی مفصل نیز وجود نداشته باشد هر 2 عضو صفر نیرویی هستند.

2/ اگر از یک مفصل 3 عضو بگذرد بطوری که نیروی 2 عضو آن در یک امتداد باشد و روی مفصل نیز بار وجود نداشته باشد عضو سوم بار هر زاویه‌ای صفر نیرویی است.

2. روش مقطع یا برش برای حل خرپا.

برای استفاده از این روش مراحل زیر را به ترتیب انجام دهیم:

Date: / / Subject:



$\leftarrow fy = 0 \rightarrow (F_{CF} \sin 60) + 4.65 = 0$

$(F_{CF}) \sin 60 = -4.65$

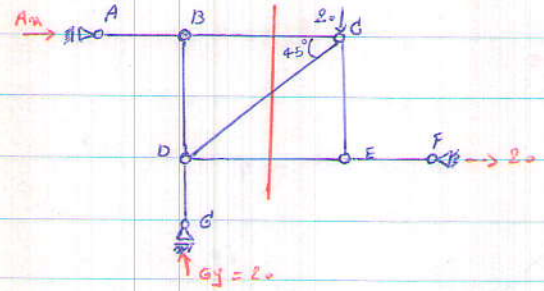
$F_{CF} = \frac{-4.65}{\sin 60} = -5.36\ t$

$\leftarrow MF = 0 \rightarrow (4 \times 2.55) = (4.65 \times 3) + (F_{CD} \times 2.55)$

$10.2 \quad 13.95$

$10.2 - 13.95 = 2.55\ F_{CD} \rightarrow -1.47$

②



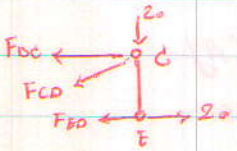
$F_{CD} = ?$

$\leftarrow fy = 0 \rightarrow -2 + Gy = 0$

$Gy = 2$

$MA = 0 \rightarrow (2 \times 4) = (F_x \times 2) + (2 \times 2)$

$4 = 2\ F_x \rightarrow F_x = 2\ t$

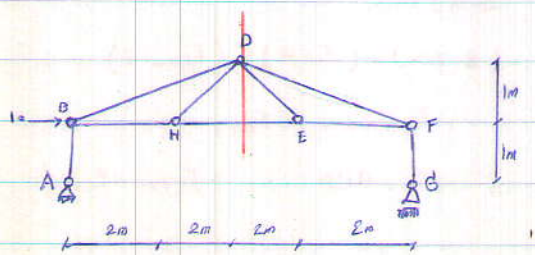


$\leftarrow fy = 0 \rightarrow -2 - F_{CD} \sin 45 = 0$

$-2 = F_{CD} \sin 45$

$F_{CD} = \frac{-2}{\sin 45} = -2.828\ t$

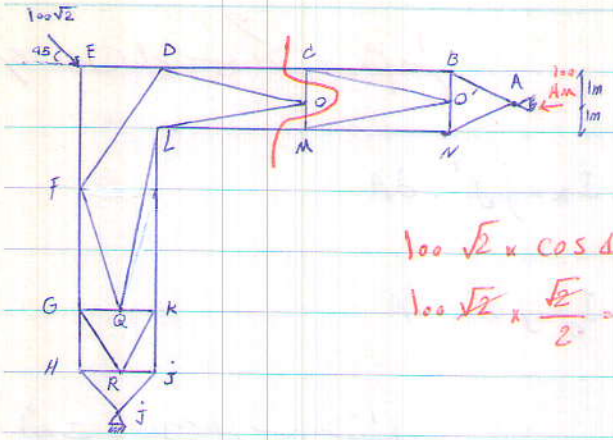
③



$F_{HE} = ?$

Date: / /

Subject:



FDC ?

$100\sqrt{2} \times \cos 45 =$

$100\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 100$

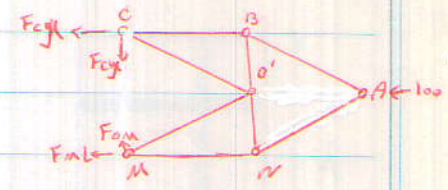
$\sum M_M = 0$

$F_{CD} \times 2 + (100 \times 1) = 0$

$2F_{CD} + 100 = 0$

$2F_{CD} = -100$

$F_{CD} = -(\frac{100}{2}) = -50t$ $\quad F_{CD} = -50\,tonN$



- معادن اینرسی (گشتاور دوم سطح - گشتاور لختی)

خواص سطوح :

۱. گشتاور اول سطح (لنگر استاتیک) Q^{cm^4}.

نسبت به محور x $\quad Q = A \times \bar{y}$

نسبت به محور y $\quad Q = A \times \bar{x}$

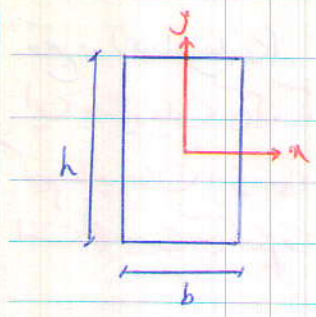
۲. شعاع ژیراسیون r.

شعاع ژیراسیون نسبت به محور x $\quad r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

شعاع ژیراسیون نسبت به محور y $\quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

Date: / / Subject:

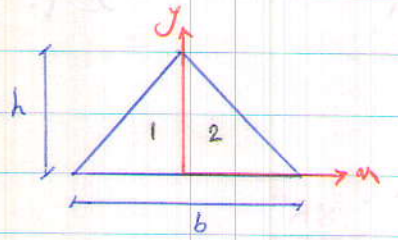
1 مستطیل



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

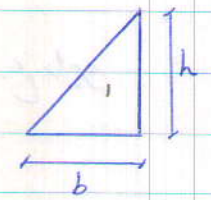
$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

2 مثلث



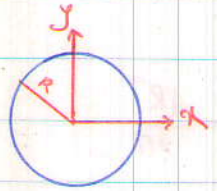
$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{48}$$



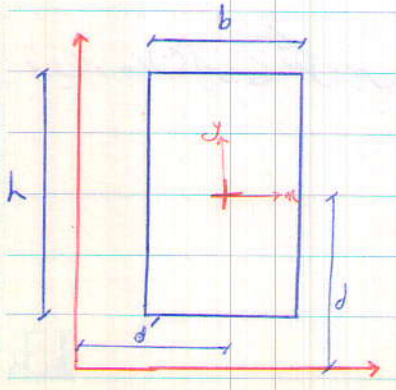
$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$$

3 دایره



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

نکته - قضیه محورهای موازی



مساحت شکل

$$I_x = I_{x_c} + A d^2$$

فاصله عمودی مرکز سطح تا محور مورد نظر

$$I_y = I_{y_0} + A d^2$$

فاصله افقی مرکز سطح شکل تا محور مورد نظر

Date: / /

Subject:

شکل	A	$\bar{x}$	$\bar{x}_i A$	$\bar{y}$	$\bar{y}_i A$
مستطیل 1	40	4	160	2.5	100
مربع 2	4	9	36	1	4
Σ	44	-	196	-	104

$$\bar{x} = \frac{196}{44} = 4.45$$

$$\bar{y} = \frac{104}{44} = 2.36$$

$y - \bar{y}$ کل

شکل	I_{xc}	A	D^2	AD	$I_{\bar{x}} = I_{xc} + Ad^2$
1	$\frac{8\times5^3}{12}$ 83.33	40	0.14	0.784	84.144
2	$\frac{2\times2^3}{12}$ 1.33	4	1.36	7.39	8.72

$92.864\ cm^4$

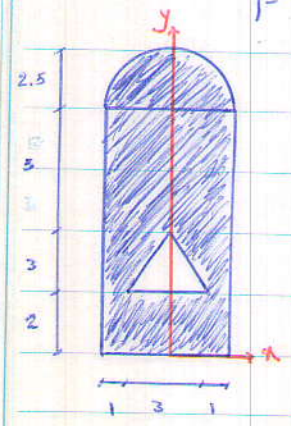
شکل	I_{yc}	A	D^2	AD	$I_{yc} = Ad^2 + A\bar{y}$
1	$\frac{5\times8^3}{12}$ 213.33	40	0.45	8.1	221.43
2	$\frac{2\times2^3}{12}$ 1.33	4	4.55	82.81	84.14

$305.57\ cm^4$

تمرین. برای محاسبه‌ی ممان اینرسی قسمت‌های توخالی باید مقدار منفی قرار دهیم.

(حساب پایانی برای ممان اینرسی کل باید مثبت شود).

* شکل نت = محور x مشترک است.



شکل	A	$\bar{y}$	$A_i \bar{y}_i$
مستطیل توپر	50	5	250
نیم دایره توپر	$\frac{3.14\times2.5^2}{2}$ 9.81	11.06	108.49
مثلث توخالی	-4.5	3	-13.9
Σ	55.31	-	344.99

$$\bar{y} = \frac{344.99}{55.31} = 6.23$$