دانشگاه فنی و حرفه ای

جزوه مقاومت مصالح

آقای مهندس حمالی

آموزشکده فنی و حرفه ای پسران بروجرد

Date: / / Subject:

مقاومت مصالح

سرفصل درس:
۱) تنش، محوری و تغییر شکل محوری
۲) کرنش، در دو محوره و سه محوره
۳) تبدیل تنش و کرنش (دایره مور)
۴) خمش در اعضا
۵) پیچش در اعضا

۱-۱ تنش

تنش: شدت نیروی وارد بر واحد سطح یا تنش می‌نامیم در فیزیک مقدارهای مفهومی به نام هستند که عبارت از تقسیم نیرو بر واحد سطح را شناخت.

$$\text{تنش} = \frac{\text{نیرو}}{\text{واحد سطح}} \qquad \sigma = \frac{P}{A}$$

این مفهوم ۲ محدودیت را در بر می‌گیرد.
۱) نیرو الزاماً باید بر سطح عمود باشد.
۲) جهت نیرو در فشار همواره به سمت داخل است.

تنش را با حرف یونانی τ «تو» و به کمک دو اندیس تعریف می‌کنند.

τ_{∞} ← جهت نیرو
τ ← صفحه‌ای که بر آن عمود است

اندیس اول نشان‌دهنده‌ی صفحه‌ای است که تنش بر آن واقع است و اندیس دوم نشان‌دهنده‌ی جهت نیروی ایجاد کننده‌ی تنش می‌باشد.

تعریف دقیق ریاضی تنش روابط زیر است.

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \qquad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \qquad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

Date: / / Subject:

تنش برشی در دو صفحه‌ی عمود بر هم همواره بصورت یک نوع عمل می‌کند که از نظر مقداری با هم برابر و جهت آن طوریست که یا هم نزدیک می‌شوند یا از هم دور می‌شوند که در زیر این مسئله را اثبات می‌کنیم.

نکته۱: چنانچه بخواهیم توزیع تنش در مقطع بصورت یکنواخت صورت گیرد بایستی بار به مرکز سطح مقطع وارد شود.

نکته۲: اگر بار فوق بصورت کششی به مقطع اعمال شود استفاده از فاصله‌ی $\sigma = \frac{P}{A}$ برای تعیین و تحلیل تنش کفایت می‌کند. در صورتی که بار بصورت فشاری اعمال گردد بایستی مقطع چاق باشد. در غیر اینصورت به علت بروز پدیده‌ای در مقطعات لاغر فشاری به نام کمانش باید ملاحظات دیگری مد نظر قرار گیرد.

نکته۳: اگر نسبت بعد حداقل مقطع به طول عضو کوچکتر از ۱:۱۰ باشد مقطع لاغر است در غیراین صورت مقطع چاق است.

مثال: میله‌ای تحت نیروی محوری ۱۰T قرار دارد. اگر تنش مجاز میله $100\ Kg/cm^2$ باشد اندازه قطر میله چقدر است؟

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow \sigma = \frac{P}{\pi r} \rightsquigarrow \sigma = \frac{P}{\pi (\frac{d}{2})}$$

$$\sigma = \frac{P}{\pi \frac{d^2}{4}} \rightsquigarrow \sigma = \frac{4P}{\pi d^2}$$

$$100 = \frac{4 \times 10 \times 10^3 Kg}{3.14 \times d^2}$$

$$d^2 = \frac{4 \times 10 \times 10^3}{100 \times 3.14} = \frac{400\,000}{100 \times 3.14}$$

$$d^2 = 127.38 \rightarrow d = \sqrt{127.38} = 11.28\ cm$$

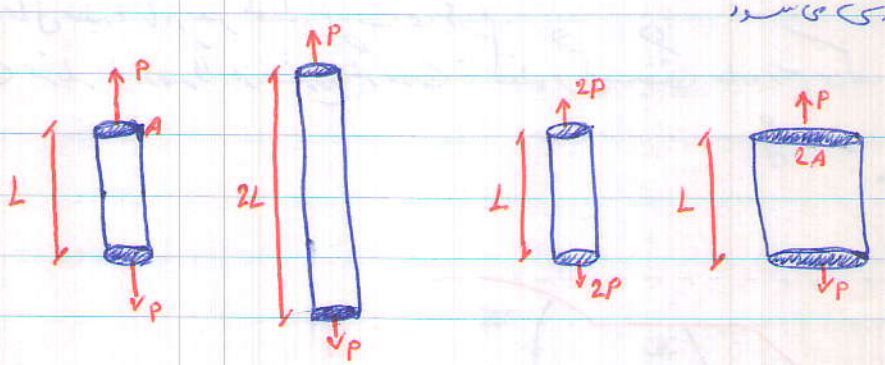
Date: / /

Subject:

1-5 تغییر شکل محوری

نیرو وقتی که همواره در راستای عضو وارد می‌شود.

واقعیت رفتار مصالح را ایجاب می‌کند که چنانچه به جسمی نیرو وارد شود دچار تغییر شکل (ε) دائماً می‌گردد. درس مقاومت مصالح ارتباط بین نیروها و تغییر شکل ناشی از آن بررسی می‌شود



تغییر شکل δ 2δ 0.5δ

آزمایشی فوق ایده‌ای در ذهن در مورد ارتباط نیروی محوری و سطح مقطع و طول عضو ایجاد می‌کند. اما چنانچه بطور مثال مقدار نیرو سه برابر گردد آزمایشی فوق به تنهایی قادر به توصیف ارتباط بین موارد فوق نخواهد بود و چنانچه شکل سطح مقطع نیز تغییر کند ممکن است در نتایج حاصله تاثیر داشته باشد.

می‌خواهیم پارامتری تعریف کنیم که با لگ آن نتایجی مستقل از شکل سطح مقطع و مقدار نیرو داشته باشد.

1-6 کرنش (تغییر شکل نسبی)

کرنش واحد ندارد. ε ← کرنش.

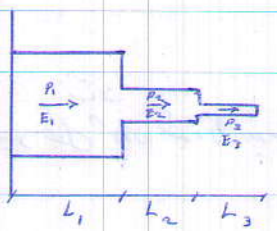
Date: / / Subject:

نکته ۱. تنشی که در آن فولاد دچار کشیدگی یا انقباض می‌شود تنش نهایی نامیده می‌شود. که با f_u نشان داده می‌شود.

نکته ۲. از آنجا که تغییر شکل‌های فولاد در خارج از محدوده الاستیک یا حتی بسیار بزرگ بوده و غیر قابل پذیرش است بنابراین در فرآیند طراحی همواره سعی می‌شود که تنش موجود در فولاد همواره کمتر از تنش جاری شدن (تسلیم) باشد و تغییر شکل‌ها در فولاد بصورت برگشت پذیر رخ می‌دهد.

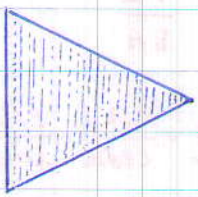
- استفاده از رابطه‌ی $\frac{PL}{EA}$ در صورتی میسر است که کلیه‌ی عوامل داخل در طول میله ثابت باشد. در صورت وجود تغییرات در طول میله حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

تغییر شکل پله‌ای:



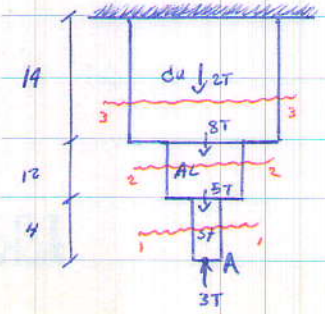
$$\delta = \sum_{1}^{n} \frac{PL}{EA}$$

تغییرات پیوسته:



$$\delta = \int \frac{P}{EA} dx$$

مثال: مطلوبست تعیین تغییر طول انتهای میله‌ی زیر:



$E_{Cu} = 1.5 \times 10^6 \, kg/cm$ $A_{Cu} = 14 cm$

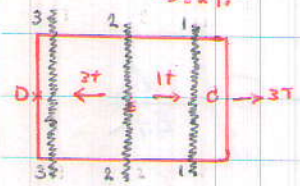
$E_{AL} = 1.2 \times 10^6 \, kg/cm$ $A_{AL} = 12 cm$

$E_{St} = 2 \times 10^6 \, kg/cm$ $A_{St} = 4 cm$

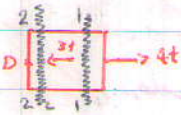
Date: / /

Subject:

$$\sigma_B = \frac{5\times10^2\times200}{5\times1\cdot^2} + \frac{3\times10^3\times200}{5\times1\cdot^2} + \frac{4\times10^3\times100}{1\cdot\times1\cdot^2} + \frac{1\times1\cdot^3\times100}{1\cdot\times1\cdot^2} = ?$$

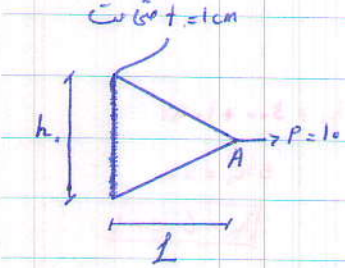


$$\sigma_C = \frac{3\times1\cdot^3\times200}{1\cdot\times1\cdot^2} + \frac{4\times1\cdot^3\times1\cdot0}{1\cdot\times1\cdot^2} + \frac{1\times1\cdot^3\times1\cdot0}{1\cdot\times1\cdot^2} =$$



$$\sigma_E = \frac{4\times10^3\times100}{100\times1\cdot^2} + \frac{1\times10^3\times100}{100\times1\cdot^2} = ?$$

مثال (تغییرات پیوسته): جابجایی نقطه A چقدر است؟



$h_0 = 2m$

$L = 2m$

$E = 2\times10^6\ kg/cm^2$

$\delta_A = ?$

* با توجه به شکل می‌بینیم سطح مقطع بصورت پله‌ای تغییر می‌کند ← لذا تغییرات بصورت پیوسته است.

- برای حل مسئله یک المان مستطیلی را انتخاب می‌کنیم.

$$\frac{h_0}{h} \quad \frac{L}{x} \Rightarrow h = \frac{xh_0}{L}$$

$$\delta_A = \int_0^{L=2m} \frac{P\,dx}{EA} = \int_0^{L=2m} \frac{P\,dx}{E\cdot h\cdot t} = \int_0^{L=2m} \frac{\frac{10\times10}{1}}{\frac{2\times10^3}{1}\times x\times h_0\times t}\,dx = \int_0^{L=2m} \frac{10\times10\times L}{2\times10^7\times x\times h_0\times t}\,dx$$

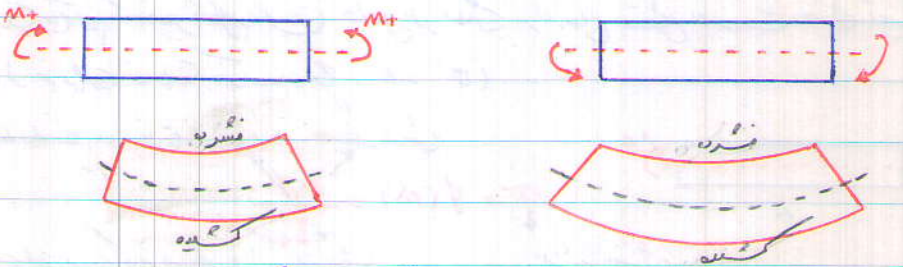
$$\frac{10\times10^3\times L}{3\times10^2\times t}\int_0^{L=2m} \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{\cancel{10}^{5}\times\cancel{10}^{3}\times2}{\cancel{3}\times\cancel{10}^{2}\times2} \times \ln x \Big|_0^{L=2m}$$

$$\frac{5}{1000}\times L\ln\underbrace{2}_{3}$$

$$= \frac{n^{-1}}{-1} = -\frac{1}{n^1} = -\frac{1}{n} \Big|_{60}^{90} \quad \left(-\frac{1}{90} - \frac{1}{60}\right) = \frac{1}{90} + \frac{1}{60} = ?$$

فصل نهم - خمش در اعضا:

مقدمه: قبل از هر چیزی می بایست نحوه‌ی ایجاد خمش در اعضا را بررسی کنیم.



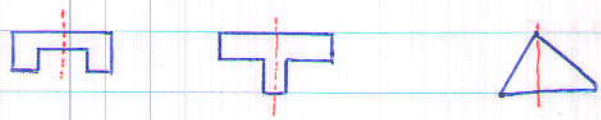
لنگر را مثبت در نظر می گیریم که زیر تار خنثی (تاری است که در مرکز سطح قرار می گیرد) کشیده می شود و قسمت بالای تار خنثی فشرده می شود و در لنگر منفی عکس است.

- فرضیات خمش

برای حل مسائلی تنش خمشی ابتدا یکسری فرضیات را مطرح نموده و بر مبنای این فرضیات مسائل خمش را حل می کنیم.

۱- مواد ممکن بوده و رفتار مصالح به کشش و فشار یکسان است. یعنی اینکه جنس مواد یکی باشد که اگر یکی نبود توسط تکنیک متقطع معادل جنس مصالح را یکی می کنیم.

۲- عضوی مقطع دارای حداقل یک محور تقارن است که در این صفحه وارد می شود که خمش همواره بر اولین محور تقارن صورت می گیرد.



Date: / / Subject:

$$\sigma_{1A} = \frac{M_1 y}{I_m} = \frac{10 \times 10^5 \times 4}{213.3} = 18752.9\ kg/m^2$$

$$\sigma_{1B} = \frac{M_1 y}{I_m} = \frac{10 \times 10^5 \times 2}{213.3} = 9376.46\ kg/m^2$$

$$\sigma_{1C} = \frac{M_1 y}{I_m} = \frac{10 \times 10^5 \times 0}{213.3} = 0$$

$$\sigma_{2A} = \frac{M_2 y}{I_m} = \frac{5 \times 10^5 \times 4}{213.3} = 9376.46\ kg/m^2$$

$$\sigma_{2B} = \frac{M_2 y}{I_m} = \frac{5 \times 10^5 \times 2}{213.3} = 4686.46\ kg/m^2$$

$$\sigma_{2C} = \frac{M_2 y}{I_m} = \frac{5 \times 10^5 \times 0}{213.3} = 0$$

خمش در مقاطع مرکب از چند ماده

در مواردی مربوط به خمش ممکن بود مقطع یک شرایطی برای حل مسئله خمش بوده؛ چنانچه مصالح بکار رفته در مقطع از چند جنس تشکیل شده باشند به کمک تکنیک مقطع معادل ابتدا کلیه مواد را به یک جنس تبدیل می‌کنیم که در این صورت فرض مورد نیاز برقرار کرده است.

مراحل حل خمش برای مقاطع مرکب:

۱- یکی از مواد را به عنوان ماده‌ی مبنا در نظر گرفته سایر مواد را به ماده‌ی مبنا تعریف می‌کنیم.

نکته: در این مرحله عوض کردن مواد می‌باشد؛

ابتدا باید جهت لنگر خمشی را مشخص کنیم چون تنش با ارتفاع تا y خطی می‌باشد بنابراین تغییر ابعاد مقطع در جهت لنگر انجام می‌گیرد.

Date: / / Subject:

$$\text{فولاد} = \frac{E_S}{E_{AL}} = \frac{2\times10^6}{1\times10^6} = 2 \qquad \text{مس} = \frac{E_{CU}}{E_{AL}} = \frac{1.5\times10^6}{1\times10^6} = 1.5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(40*1*26.5)+(20*25*13.5)(1*30*0.5)}{(40*1)+(20*25)+(1*30)} = 13.73\,cm$$

فاصله مرکز سطح تا محور x

$$I_{xc} = I_x + Ad^2 \rightarrow y-\bar{y}$$

$$I_{xc} = \left(\frac{40*1^3}{12} + (40)(1)(12.75)^2\right) + \left(\frac{20*25^2}{12} + (20*25)(0.23)^2\right) +$$

$$\left(\frac{30*1^3}{12} + (30*1)(13.23)^2\right) = \quad I_{xc} = 37847.9\,cm^2$$

$$(\sigma_{max})_{AL} = \frac{M\cdot y_{max}}{I_x} = \frac{5\times10^5\,kg.cm*12.73}{37847.9} = 168.17\,kg/cm^2$$

$$(\sigma_{max})_S = \frac{M\cdot y_{max}}{I_x} * 2 = \frac{5\times10^5\times13.27}{37847.9}\times 2 = 350.61\,kg.cm^2$$

$$(\sigma_{max})_{cu} = \frac{M\cdot y_{max}}{I_x} * 1.5 = \frac{5\times10^5\times13.73}{37847.9}\times1.5 = 272.07\,kg.cm^2$$

فصل سوم - برش در اعضاء

اگر در یک مقطع نیروی برشی عمل کند (نیروی که عمود بر مقطع باشد) در آن ایجاد تنش برشی τ (تاو) که از رابطه زیر بدست می‌آید.

نیروی برشی وارد بر سطح

$$\tau = \frac{VQ}{I_x t}$$

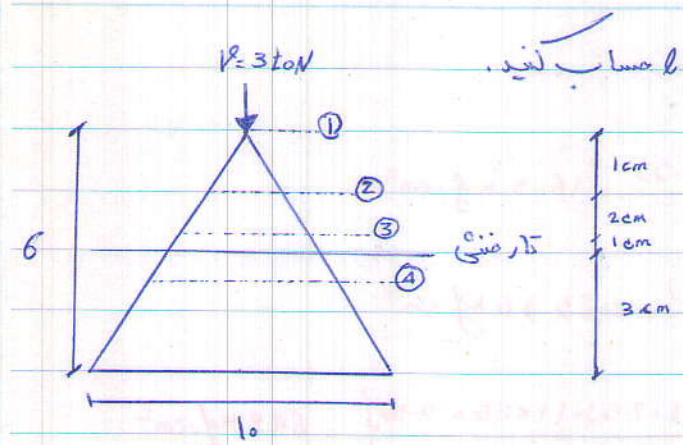
گشتاور اول سطح (گشتاور استاتیک)

عرض (پهنا) مقطع

مقدار ایزی که مقطع مورد نظر خنثی

Date: / / Subject:

مثال: تنش برشی τ_{max} را حساب کنید.



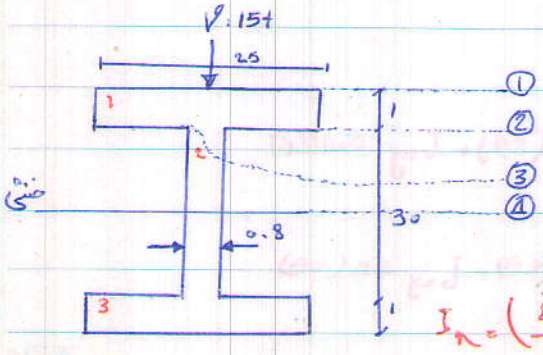
$$\tau_1 = \frac{VQ}{It} = \frac{3\times10^3\times(0.y)}{It} = 0 \qquad \tau_1 = 0$$

$$\tau_2 = \frac{VQ}{It} = \frac{3\times10^3\times(\frac{1}{2}\times\times1.6\times3.33)}{\frac{10\times6^3}{36}*.6} = 83.2\,kg\ \tau_2$$

$$\tau_3 = \frac{3\times10^3\times(\frac{1}{2}\times5\times3\times2)}{\frac{10\times6^3}{36}*5} = 15.0\,kg\ \tau_2$$

$$\tau_4 = \frac{3\times10^3\times(\frac{1}{2}\times4\times6.66\times1.33)}{\frac{10\times6^3}{36}*6.66} = 13.3\,kg\ \tau_4$$

مثال: تنش برشی τ_{max} را حساب کنید.



12.16.66

2.08

$$I_x = \left(\frac{25\times1^3}{12} + (25\times1)(15.5)^2\right)\times2 \text{ سطح} + \left(\frac{0.8\times30^3}{12} + (3\cdot\cdot\cdot\cdot0.8)\times\cdot\right)_{\text{2 سطح}} = 13816.7\ cm^4$$

نکته: اگر θ ساعتگرد بچرخد علامت θ منفی می‌شود.

σ_x ، σ_y تنش‌های قائم ـ نرمال

τ_{xy} تنش برشی

طریقه کشیدن دایره مور:

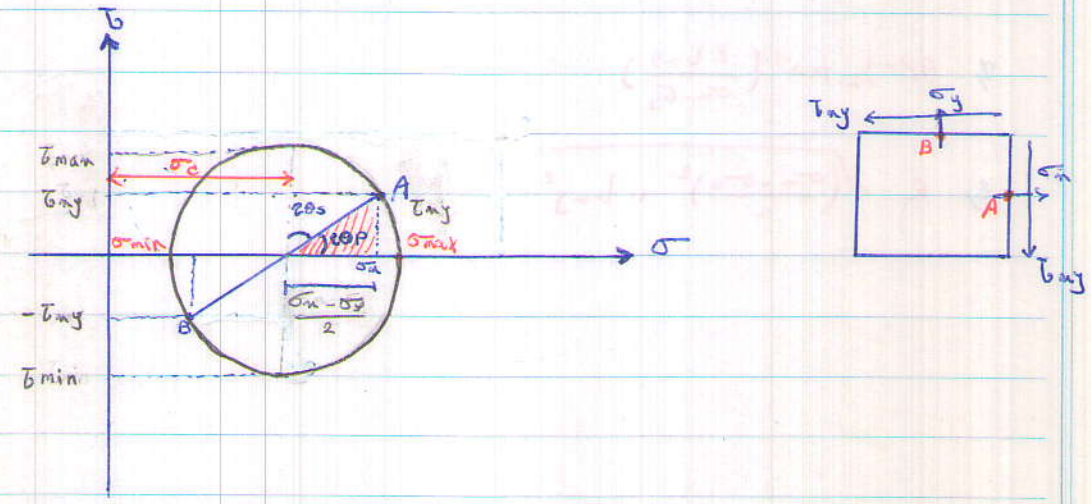
ـ قرارداد:

۱/ تنش‌های نرمال کششی مثبت است و مشابه‌ی منفی

۲/ اگر تنش برشی المان را ساعتگرد بچرخاند τ_{xy} مثبت است در غیر اینصورت منفی است

۳/ چرخش المان به اندازه‌ی θ برابر است با چرخش 2θ در دایره مور آن.

نکته: در ترسیم دایره مور یک محور مختصات داریم که محور افقی مربوط به تنش‌های نرمال و محور قائم مربوط به تنش‌های برشی است.



زاویه‌های اصلی

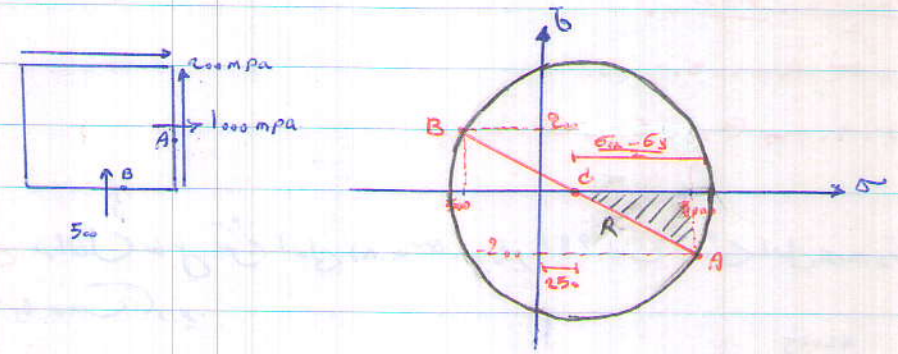
θ_s : زاویه‌ای که المان می‌چرخد تنش برشی به بیشترین مقداری است.

θ_p : زاویه‌ای که المان می‌چرخد تنش برشی به صفری است.

Date: / /

Subject:

مثال: با توجه به شکل زیر تمام پارامترهای دایره مور را بدست آورید.



$$\sigma_c = \frac{\sigma_m + \sigma_y}{2} = \frac{1000 - 500}{2} = 250$$

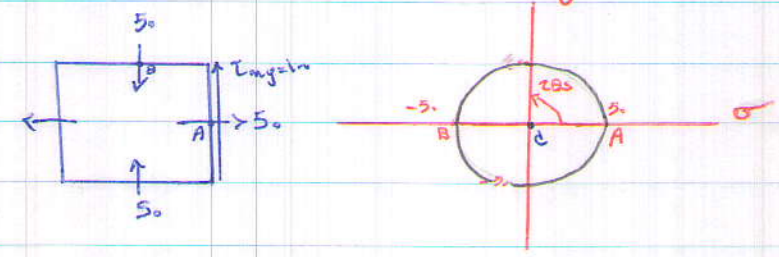
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \left(\frac{1000 + 500}{2}\right)^2 + (200)^2 \Rightarrow R = \sqrt{(750)^2 + 40000} = 776.2$$

$$\tau_{max} = R = 776.2$$

$$\sigma_{max} = \sigma_c + R = 250 + 776.2 = 1026.2$$

$$\sigma_{min} = \sigma_c - R = 250 - 776.2 = -526.2$$

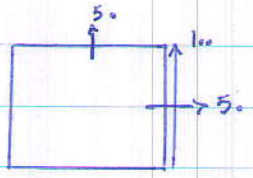
مثال: دایره مور المان زیر را رسم کنید و تنش برشی Max چقدر است؟

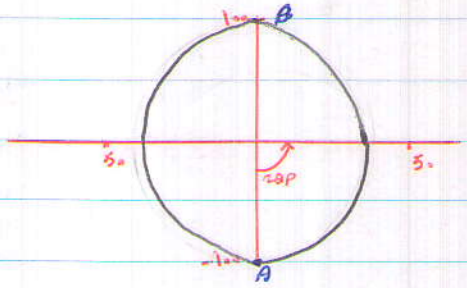


Date: / /

Subject:

مثال: دایره مور المان زیر را رسم کنید.





$R = 100 = \tau_{max}$

$\sigma_{min} = \sigma_c - R$

$50 - 100 = -50$

$\sigma_{max} = \sigma_c + R = 50 + 100 = 150$

$2\theta P = 90^\circ \rightarrow \theta P = 45^\circ \qquad \theta s = 0$