بسمه تعالی

« کنترل خطی »

دکتر طالبی

گردآوری : مهدی افشاری

(دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران))

سال تحصیلی ۸۲-۸۱

ترم بهار

* جلسه نخست : یکشنبه ۸۱/۱۱/۲۷

* منابع :

* Text book:
  - Modern Control Systems
    R. C. Dorf   7th Edition

* References :
  - Moden Control Eng.
    K. Ogata   3rd Ed. 1997
  - Feedback Contorol of dynamical Systems
    Franklin, Emami, Naini, 1997
  - Kuo
  - Nise

* Evaluation :

  25% - 35% : Midterm
  45% - 55% : Final exam
  10% - 20% : Ass. - Project.

* Rules :
  - No entries after 8:10' AM
  - Nobody leaves the classroom once entered

سیستم‌های دینامیکی :

$$y^{(n)}(t) = f\left(y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \quad , u(t), u(t)\right)$$

$y(t) = f(u(t))$ ⟵ استاتیکی ⟵ با این معادله کاری نداریم

سیستمهای مورد استفاده ما دینامیکی هستند. همه سیستمهای فیزیکی دینامیک دارند.

در برق تنها یک مدار تعادلی ساده است که دینامیک ندارد که با آن استعداد هم نیست :

• معادله تفاضلی : $y(k+n) = g(y(k+n-1), \dots, y(k), u(k+m), \dots, u(k))$

با اینگونه معادلات هم سروکاری نداریم.

• مباحث این بخش :

- نمایش سیستمها
- رفتار سیستمها
- تغییرات سیستمها

کنترل $\begin{cases} \text{حلقه باز} \\ \text{فیدبک (حلقه بسته)} \end{cases}$

• مراحل طراحی یک سیستم کنترل :

- Objective (هدف) ← خروجی مطلوب
  - Tracking : تعقیب ← $y_d(t)$
  - Regulation : رگولاسیون ← $y_d(t) = cte$

$y_d \rightarrow$ desired

شاخص های برای تعیین میزان نزدیکی خروجی به خروجی مطلوب
- شاخصهای سرعت
- شاخصهای دقت

• مدل سازی :

شناخت رفتار سیستم
- متغیرهای خروجی
- اهرم کنترل (متغیر ورودی)
- متغیرهای میانی (که در بعضی مدل سازیها با این متغیر سروکار داریم)

اعمال قانونهای فیزیکی حاکم بر پروسه.

رابطه (معادله دیفرانسیل) بین متغیر ورودی و خروجی ← مدل سازی

* نمایش سیستمها : { I/O : < زمان ، فرکانس ؛ فضای حالت

* رفتار سیستم ها : {
مدل غیرخطی (پیچیده) ← مرجع برای تحلیل و شبیه سازی
مدل خطی (ساده) ← مثلاً برای محدوده کاری کوچک ← مرجع برای طراحی

* تغییرات سیستمها { Time Variant ؛ Time invariant

ما با سیستمهای Linear Time Invariant (LTI) سروکار داریم.

بعضی مواقع ← مدلها بصورت ریاضی در اختیار نیستند. ← بصورت داده های ورودی خروجی در اختیار هستند.

ورودی باید غنی باشد یعنی همه مودهای سیستم را تحریک کرده باشد تا در خروجی مشاهده شود. (goal)

یک سری ورودی ها که همهٔ مودهای سیستمهای مورد نظر را تحریک می کنند ، که به این تحریک ، تحریک پایا (persistantly excitation) می گویند ← شناسایی سیستمها

Model Verification (تطبیق مدل) :

بعد از این که یک مدل نامی از سیستم بدست آمد ، سراغ کنترل می رویم.

: Control

یافتن اهرم کنترل (uct) طوریکه خروجی سیستم ، خروجی مطلوب را دنبال کند

* تعریف ریاضی کنترل :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, u)$$

Find $u(t)$ s.t. $y(t) \to y_d(t)$, $t \to \infty$

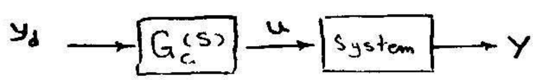
* آنالیز پایداری (کاملاً وابسته به مدل) :

BIBO ← خروجی به ازای همه ورودیهای محدود، محدود باشد

Internal (داخلی) ← تمام سیگنال‌های داخل سیستم محدود باشند

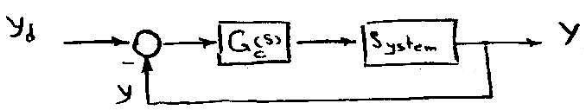
• کنترل حلقه باز : Open Loop Control :

هدف، پیدا کردن u جوری که y به سمت y_d برود.



$$u = G_c(s) \cdot y_d$$

• کنترل حلقه بسته : (Close Loop Control) :



$$u = G_c(s) \cdot \underbrace{(y_d - y)}_{e}$$

در این روش، توانایی مقابله با تغییرات (اغتشاشات) را داریم.

* جلسه دوم : سه‌شنبه ۸۱/۱۱/۲۹

* مدل‌های ریاضی سیستمها:

(۷)

. نمایش ورودی - خروجی

. مدل خطی سیستمها { اجزاء خطی / محدوده عملکردی / محدوده سرعت

متغیر { ورودی : اهرم کنترل است / خروجی : چیزها سیستم که دارا کنترل شود

مدل : رابطه ریاضی میان متغیرهای سیستم :

که برای سیستمهای دینامیکی ، همان معادله دیفرانسیل است :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \dots, u', u)$$

* مباحث این بخش :

- تعریف سیستم و اجزای آن
- فرضیاتی راجع به عملکرد سیستم و خطی سازی
- اعمال قوانین فیزیکی حاکم بر پدیده
- تبدیل لاپلاس و مفهوم تابع تبدیل .

* با دو نوع متغیر سروکار داریم :

(۱) Variable Across Elements : متغیرهایی که نسبت به دو سر المان اندازه گیری می‌شوند :

مانند : اختلاف پتانسیل ، اختلاف فشار ، اختلاف سرعت

(۲) Variable Through Elements : متغیرهایی که به شکل عبور از داخل المان اندازه گیری می‌شوند .

مانند : جریان ، نیرو

* برای هر سیستم ۳ دسته المان مشخص می‌کنیم :

(۱) المان مصرف‌کننده انرژی (۲) المان ذخیره‌کننده انرژی (۳) المان القاء‌کننده

(a) سیستم الکتریکی:

- متغیر عبوری: جریان: i (A) متغیر ظرفی: v (V)

. المان تلف کننده انرژی: مقاومت $i = \frac{v}{R}$

. المان ذخیره کننده انرژی: خازن $i = C \cdot \frac{dv}{dt}$

. المان القاء: سلف: $v = L \cdot \frac{di}{dt}$

- قوانین فیزیکی حاکم: KCL و KVL

(b) سیستم مکانیکی انتقالی (خطی):

- متغیر عبوری: نیرو: F (N) متغیر ظرفی: سرعت v ($m.s^{-1}$)

. المان تلف کننده انرژی (اصطکاک): دمپر: f $F = f.v$

اصطکاک خطی (اصطکاک ویسکوز) ←

تذکر: اصطکاک دیگری نیز وجود دارد که تابع جهت سرعت است (اصطکاک کولمب)

. المان ذخیره کننده انرژی: جرم M $F = Ma \Rightarrow F = M \cdot \frac{dv}{dt}$

. المان القایی: فنر k $F = Kx \rightarrow v = \frac{1}{K} \cdot \frac{dF}{dt}$

- قوانین حاکم: قانونهای نیوتن

تذکر: از مقایسه سیستمهای مکانیکی و الکتریکی نتیجه می‌گیریم:
برای مدلسازی یک سیستم مکانیکی، به کمک سیستم الکتریکی، مقاومت و سلف بکار رفته در مدل الکتریکی، مقادیری را برابر با عکس مقدار دمپر و فنر در سیستم مکانیکی، خواهند داشت.

(c) سیستم مکانیکی چرخشی (زاویه‌ای):

متغیر عبوری: گشتاور $T\,(N.m)$ متغیر طرفی: $\omega\ (rad.s^{-1})$

. المان تلف کننده انرژی: دمپر چرخشی $T = B\omega$

. المان ذخیره کننده انرژی: ممان اینرسی J $T = J.\frac{d\omega}{dt}$

. المان القایی: فنر چرخشی: K $\omega = \frac{1}{K}.\frac{dT}{dt}$

قوانین فیزیکی حاکم: قوانین نیوتون

(d) سیستم سیال:

- متغیر عبوری: نرخ شارش حجمی (دبی): $Q\,(m^3.s^{-1})$ متغیر طرفی: اختلاف فشار $P\,(pascal)$

- . المان تلف کننده انرژی: مقاومت سیال: R_p $Q = \frac{1}{R_p}.P$

. المان ذخیره کننده انرژی: ظرفیت سیال: C_p $Q = C_p.\frac{dP}{dt}$

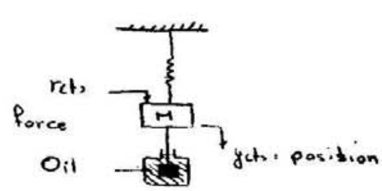
. المان القایی: اینرسی سیال: I $P = I.\frac{dQ}{dt}$

- قوانین حاکم: اصل بقای انرژی (جرم)

← تفاضل انرژی ورودی و خروجی باعث تغییر فلو می‌شود.

$$Q_i - Q_o = A.\frac{dh}{dt} \rightarrow \text{Level}$$

. مثال: سیستم ساده جرم - فنر - دمپر (dash-pot):



$$M.\frac{d^2y}{dt^2} = r(t) - f.\frac{dy}{dt} - Ky \rightarrow$$

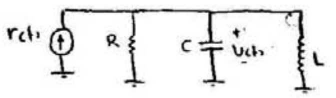
$$r(t) = M.\ddot{y} + f\dot{y} + Ky$$

تذکر: از این به بعد فرض می‌کنیم، نیروی وزن جرم با نیروی اولیه فنر خنثی شده است (اصطلاحاً معادلات را از نقطه تعادل نوشته‌ایم.

تاکنون معادله را برحسب جابجایی نوشته‌ایم، اکنون آن را براساس سرعت می‌نویسیم:

$$M\frac{dv}{dt} + Pv + K\int_0^t v\,d\tau = r(t)$$

اکنون یک سیستم الکتریکی مشابه، مثال می‌زنیم:



$$r(t) = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau$$

به این، آنالوژی جریان - نیرو گوییم.

آنالوژی ← شبیه‌سازی ← ساده‌تر شدن تحلیل سیستمهای پیچیده

• تقریب خطی سیستمهای غیرخطی:

کلیه روابطی که تاکنون نوشتیم در یک محدوده (range) خاصی از تغییر برقرار بود.

سیستمهای خطی:

- جمع آثار: $\left.\begin{array}{l} x_1 \to y_1 \\ x_2 \to y_2 \end{array}\right\} \to x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$
- همگنی: $x_1 \to y_1 \Rightarrow ax_1 \to ay_1$

• تمرین (مهلت تحویل: یک هفته)

(a) مثالهایی از سیستمهای فیزیکی بزنید که همگن باشد ولی جمع آثار برای آن صادق نباشد.

(b) ثابت کنید، اگر جمع آثار صادق باشد، برای همهٔ α های گویا، همگنی هم صادق است.

تقریب خطی حول نقطه کار:

$$y = g(x)$$

$$y = g(x_0) + \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

تقریب خطی زدن یعنی در نظر نگرفتن جملات درجه ۲ به بالا :

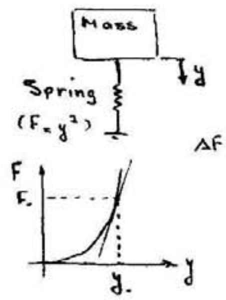
$$|x-x_0|\ll 1 \text{ : با فرض } \Rightarrow y = g(x_0) + \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}\cdot(x-x_0) \Rightarrow$$

$$y = \underbrace{g(x_0)}_{y_0} + m\underbrace{(x-x_0)}_{\Delta x} \Rightarrow \quad y = m\Delta x + y_0 \Rightarrow \underbrace{y-y_0}_{\Delta y} = m\Delta x \Rightarrow$$

البته تنها حول و حوش نقطه کار معتبر است :

$$\Delta y = m\cdot\Delta x$$

مثال:



$$F_0 = Mg \Rightarrow Mg = y_0^2 \Rightarrow y_0 = \sqrt{Mg}$$

$$\Delta F = K\Delta Y \Rightarrow K = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=y_0} = 2y_0 = 2\sqrt{Mg}$$

بیان از روی نمودار :

• تبدیل لاپلاس:

سیگنال $f(t)$ تبدیل لاپلاس دارد اگر $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_0 t}dt<\infty$ و α ای وجود دارد که به ازای $\sigma_0>\alpha$ انتگرال معرفی شده محدود است.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

تبدیل معکوس لاپلاس :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

در عمل از این تعریف استفاده نمی‌کنیم.
برای عکس تبدیل لاپلاس گرفتن از بسط کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم.

نوع پاسخ زمانی : توسط α ها (ریشه‌های مخرج تابع تبدیل) مشخص می‌شود . α ها مد (mode) سیستم نام دارند.

* جلسهٔ سوم: یکشنبه: ۸۱/۱۲/۴

تبدیل لاپلاس و معکوس آن:

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{L} s.F(s) \qquad \int^{t} f(\lambda)\,d\lambda \xrightarrow{L} \frac{F(s)}{s}$$

* مثال: سیستم مکانیکی درجهٔ ۲:

$$M.\frac{d^2y(t)}{dt^2} + f.\frac{dy(t)}{dt} + Ky = r(t) \rightarrow$$

$$M(s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)) + f(sY(s) - y(0)) + KY(s) = R(s)$$

فرضیات: $\quad r(t)=0 \qquad \dot{y}(0)=0 \qquad y(0)=y_0$

$$\rightarrow Y(s)(Ms^2+fs+K) = y_0.(Ms+f) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{Ms+f}{Ms^2+fs+K}.y_0 \rightarrow Y(s) = \frac{s+\frac{f}{M}}{s^2+\frac{f}{M}s+\frac{K}{M}}.y_0$$

عبارت فوق تابع تبدیل نیست چون: (۱) منسب خروجی به ورودی نیست (۲) شرایط اولیه صفر نیست.

بفرض: $\frac{f}{M}=3$ ، $\frac{K}{M}=2$ $\leftarrow$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}y_0 = \frac{(s+3)y_0}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \left(\frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}\right)y_0 \qquad K_1 = (s+1)Y(s)\big|_{s=-1} = 2 \qquad K_2 = (s+2)Y(s)\big| = -1$$

$$\rightarrow Y(s) = \left(\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right).y_0 \Rightarrow y(t) = (2e^{-t} - e^{-2t}).y_0$$

بطور کلی نوع پاسخ زمانی سیستم تأثیرپذیر از ریشه‌های مخرج است.

سیستمهای درجهٔ ۲ اهمیت خاصی دارند. لذا در این قسمت به بررسی آنها می‌پردازیم:

سیستم درجهٔ ۲ استاندارد:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

که به ω_n: فرکانس طبیعی و به ξ: ضریب میرائی گوئیم.

فرکانس طبیعی: فرکانسی است که اگر سیستم هیچگونه میرائی نداشته باشد، با آن فرکانس نوسان خواهد کرد و تنها پاسخ خاص

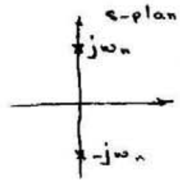
حافظه دار سیستم می باشد .

مثال : در سیستم بیان شده در مثال قبل ، ω_n و ξ را بیابید :

$$y(s) = \frac{s+\frac{f}{M}}{s^2+\frac{f}{M}s+\frac{K}{M}} \cdot y_0 \quad \longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \qquad \xi = \frac{f}{2\sqrt{KM}}$$

تذکر : این سیستم ، یک سیستم درجه دو استاندارد نیست .

* نوع پاسخ زمانی تحت تأثیر ریشه های مخرج است : $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$



(a) $\xi = 0$ ← مشخصه میرایی وجود ندارد :

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

در این حالت ، پاسخ نوسانی نامیرا است . پاسخ موهومی خالص است $\sin(\omega_n t)$

(b) $0 < \xi < 1$ ← پاسخ نوسانی میرا است (فرومیرا)

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

بصورت کلی : $e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \beta t + \theta) \, , \; \beta = \sqrt{1-\xi^2}$

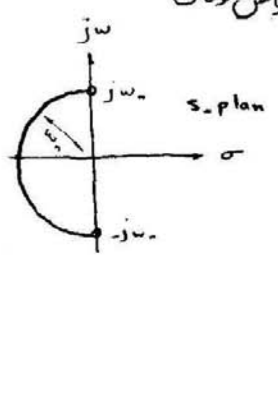
مشخص است که قسمت حقیقی مرتبط به بخش نمایی پاسخ زمانی است و بخش موهومی مرتبط با قسمت نوسانی پاسخ زمانی است

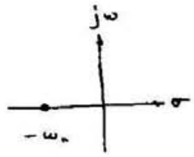
بطورکلی : $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

α : شیب میرایی ($e^{-\alpha t}$) β : فرکانس نوسان

← هرچه به محور $j\omega$ نزدیک شویم میرایی کم می شود .

و هرچه از محور افقی دور شویم ، فرکانس بیشتر می شود .

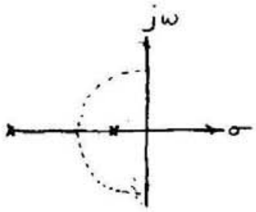




(c) $\quad \xi = 1 \Leftarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n = -\omega_n$

← پاسخ زمانی به صورت میرای بحرانی است:

$$K_1 e^{-\omega_n t} + K_2 t e^{-\omega_n t}$$



(d) $\quad \xi > 1 \Leftarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2-1}$:

پاسخ زمانی به صورت فرامیرا است.

$$K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t}$$

• مثال: سیستم‌های جرمی مختلط :

$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \qquad r(t) = \delta(t)$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ms^2 + Fs + K} \Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{F}{M}s + \frac{K}{M}} = \frac{P_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

(d) $\quad 1 > \xi > 0$ ← تبدیل کردن به فرمی از حالت استاندارد

فرض: $0 < \xi < 1 \Rightarrow s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n \underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\beta}$

$$s_2 = s_1^* = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

تذکر: برای توابع حقیقی گویا، اگر s_1 یک ریشه باشد، s_1^* نیز یک ریشه آن خواهد بود.

$$Y(s) = \frac{P_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 + \xi^2\omega_n^2 - \xi^2\omega_n^2} = \frac{P_0}{(s+\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\beta)^2}$$

می‌خواهیم پاسخ زمانی را بیابیم:

یادآوری:

$$Y(s) = \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + s^2} \Rightarrow y(t) = \sin\omega_n t$$

$$Y(s) = \frac{\frac{P_0}{\omega_n\beta}\cdot\omega_n\beta}{(s+\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\beta)^2} \Rightarrow y(t) = \frac{P_0}{\omega_n\beta} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_n\beta t$$

روش دیگر برای رسیدن به $y(t)$ بسط به کسرهای جزئی است :

$$Y(s)=\frac{P_0}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \rightarrow Y(s)=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_1^*}$$

چون ریشه‌ها مزدوج هستند ← $K_2=K_1^*$

$$K_1=(s-s_1)Y(s)\Big|_{s=s_1}=\frac{P_0}{s-s_1^*}\Big|_{s=s_1}=\frac{P_0}{s_1-s_1^*}=\frac{P_0}{-\xi\omega_n+j\omega_n\beta-(-\xi\omega_n-j\omega_n\beta)}=\frac{P_0}{2j\omega_n\beta}=\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}$$

$$K_2=K_1^*=\frac{jP_0}{2\omega_n\beta} \rightarrow Y(s)=\frac{-jP_0/2\omega_n\beta}{s-s_1}+\frac{jP_0/2\omega_n\beta}{s-s_1^*} \rightarrow$$

$$y(t)=\left(\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}\right)e^{s_1t}+\frac{jP_0}{2\omega_n\beta}e^{s_1^*t} \rightarrow$$

$$y(t)=\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}e^{-\xi\omega_nt}e^{j\omega_n\beta t}+\frac{jP_0}{2\omega_n\beta}e^{-\xi\omega_nt}e^{-j\omega_n\beta t} \rightarrow$$

$$y(t)=\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}\cdot e^{-\xi\omega_nt}\underbrace{\left(e^{j\omega_n\beta t}-e^{-j\omega_n\beta t}\right)}_{2j\sin(\omega_n\beta t)} \rightarrow y(t)=\frac{P_0}{\omega_n\beta}e^{-\xi\omega_nt}\sin(\omega_n\beta t)$$

* تابع تبدیل :

- تابع تبدیل، نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به ورودی است وقتی همهٔ شرایط اولیه صفر باشند

* مثال: برای سیستم مکانیکی درجهٔ ۲ بیان شده:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ms^2+fs+K}$$

* تابع تبدیلهای حقیقی گویا : یعنی ضرایب حقیقی باشد.

$$Y(s)=\frac{m(s)}{n(s)}, \quad \deg(m)<\deg(n)$$

• تعاریف و پارامترهایی که بواسطهٔ تابع تبدیل تعریف می‌شوند:

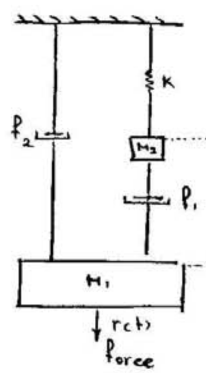
(۱) معادلهٔ مشخصه : معادلهٔ $n(s)=0$

(۲) قطبهای سیستم: ریشه‌های معادله مشخصه است.

(۳) صفرهای سیستم: ریشه‌های معادله $m(s)=0$ (چون $Y(s)$ را صفر می‌کند)

⇦ نوع پاسخ زمانی توسط قطبهای سیستم و شکل آن توسط صفرها صورت می‌گیرد

* مثال: تابع تبدیل سیستم زیر را بیابید:

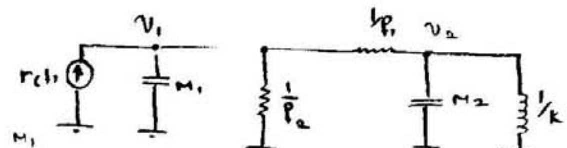


حل: به کمک مدلسازی با مدار الکتریکی:

سرعت ⇐ ولتاژ   نیرو ⇐ جریان

جرم ⇐ خازن   فنر ⇐ سلف (با اندازه عکس)

دمپر ⇐ مقاومت (با اندازه‌ی عکس)



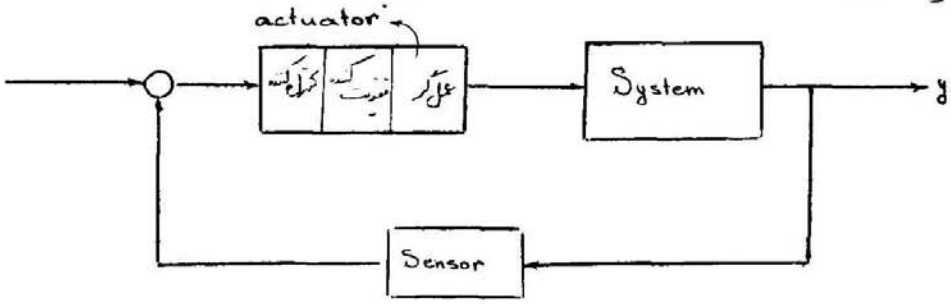
$$r(t) = C\frac{dV_1}{dt} + f_2V_1 + f_1(V_1 - V_2) \Rightarrow R(s) = M_1 s V_1(s) + (f_1+f_2)V_1(s) - f_1 V_2(s)$$

$$0 = M_2 s V_2(s) + \frac{K}{s} V_2(s) + (V_2(s) - V_1(s)) f_1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 s + f_1 + f_2 & -f_1 \\ -f_1 & M_2 s + \frac{K}{s} + f_1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|} \cdot B$$

اینجا می‌توان دید پاسخ زمانی ارتباطی به محل قرار گرفتن منبع یعنی خروجی ندارد. چون $|A|$ ساختار اتصالات مدار ثابت است. (یعنی اینکه چگونه عناصر مدار به یکدیگر متصل شده‌اند)

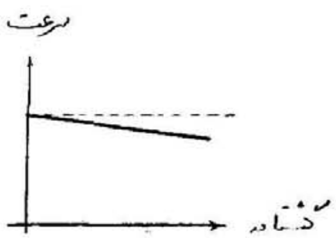
* اهمیت موتور dc :



عملگر: کار تبدیل انواع انرژی را بر عهده دارد - توان لازم برای حرکت سیستم را فراهم می آورد.

چون بیشتر کنترل کننده های ما الکتریکی و بیشتر سیستمهایی که با آن سروکار داریم، مکانیکی هستند، پس به یک عملگر الکترومکانیکی نیاز داریم. یکی از مهمترین عملگرهای الکترومکانیکی، موتور dc است.

* دلایل استفاده از موتور dc بعنوان عملگر الکترومکانیکی :



(۱) قابلیت حمل و نقل
(۲) قابلیت کنترل سرعت
(۳) محدوده گشتاوری مناسب
(۴) مشخصه گشتاور - سرعت خوبی دارد.

* ... الآن می خواهیم تابع تبدیل موتور dc را بیابیم (نه بعنوان تمرین، بلکه بعنوان یک کاربرد)

فرضیات :

عواملی که سیستم را غیر خطی می کند:

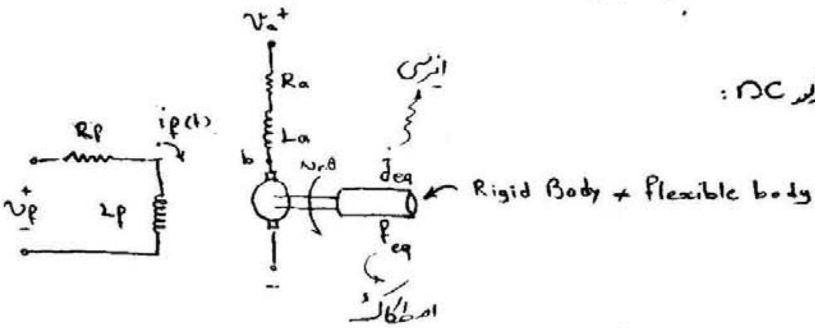
(۱) منحنی مغناطیس شوندگی
(۲) ملحقات مکانیکی
(۳) هیسترزیس
(۴) افت ولتاژ روی جاروبکها

• فرضیات اولیه :

- منحنی مغناطیس شوندگی خطی فرض می‌شود.
- از تلفات مکانیکی صرفنظر می‌شود.
- از هیسترزیس صرفنظر می‌شود.
- افت ولتاژ روی جاروبکها صرفنظر می‌شود.

* جلسه چهارم : سه‌شنبه ۸۱/۱۲/۶

تابع تبدیل یک موتور DC :



با فرض خطی بودن منحنی مغناطیس شوندگی :

$$\Phi = K_1 \cdot i_f(t)$$

$$T_m = K_2 \cdot \Phi(t) \cdot i_a(t)$$

گشتاور تولیدی de

$$\rightarrow \quad T_m = K_1 \cdot K_2 \cdot i_a(t) \cdot i_f(t)$$

این رابطه در حالت کلی خطی نیست. اما اگر یکی از عناصر $i_a(t)$ یا $i_f(t)$ ثابت باشد رابطه خطی خواهد بود :

* کنترل میدان $(i_a(t) = I_a)$

$$\rightarrow \quad T_m = \underbrace{K_1 K_2 I_a}_{K_m} \cdot i_f(t) \rightarrow \quad T_m = K_m \cdot i_f(t)$$

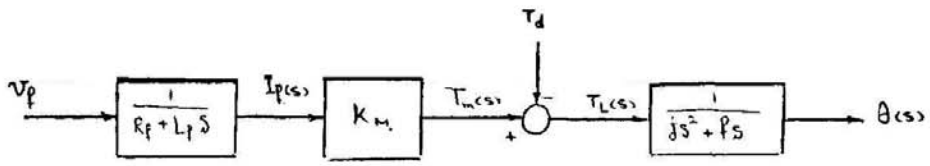
ثابت موتور

$$T_m = T_L + T_d$$

گشتاور اغتشاش

$$T_L = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta}$$

$$I_f(s) = \frac{V_f}{R_f + L_f s} \quad , \quad T_L(s) = (Js^2 + fs)\,\theta(s)$$



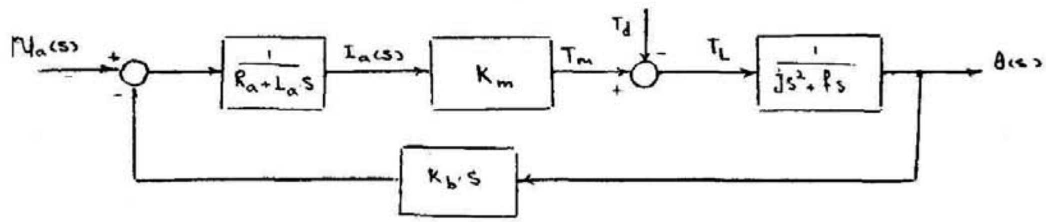
تابع تبدیل سیستم در حالت کنترل میدان :

$$T_d(s)=0 \rightarrow \frac{\theta(s)}{V_f(s)}=\frac{K_m}{s\underbrace{(f+js)}_{\text{ثابت زمانی مکانیکی}}\underbrace{(R_f+L_f s)}_{\text{ثابت زمانی الکتریکی}}}$$

* کنترل آرمیچر : $(i_f(t)=I_f)$

$$T_m=K_m i_a(t) \qquad K_m=K_1K_2I_f$$

$$\left.\begin{array}{l} I_a(s)=\dfrac{V_a-V_b}{R_a+L_aS} \rightarrow \\ V_b=k_b\,\omega(s)=k_b S\cdot\theta(s) \rightarrow \end{array}\right\} \Rightarrow I_a(s)=\frac{V_a(s)-K_b\cdot S\cdot\theta(s)}{R_a+L_a S}$$



یافتن تابع تبدیل کمک دیاگرام فیدبک :

$$T_d=0$$

$$\hookrightarrow \frac{\theta(s)}{V_a(s)}=\frac{\dfrac{K_m}{S(R_a+L_aS)(js+f)}}{1+\dfrac{K_bK_mS}{S(R_a+L_aS)(js+f)}}$$

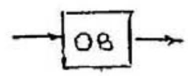
$$\rightarrow \frac{\theta(s)}{V_a(s)}=\frac{K_m}{S(R_a+L_aS)(js+f)+K_bK_mS}$$

• فیدبک ذاتی در این حالت موجود است،

• ثابت نگهداشتن جریان میدان راحت تر است

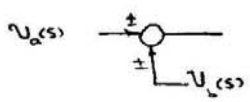
مدل دیاگرام بلوکی :

(۱) بلوک عملیاتی:



خاصیت عنصر را نشان می‌دهد.

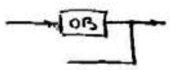
Sumation Point (۲)



جمع جبری سیگنالهای داخل حلقه :

$E(s) = \pm V_a(s) \pm V_b(s)$

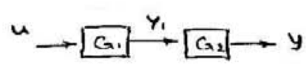
(۳) نقطه انشعاب : (Pick-off Point)



(9I = 1)

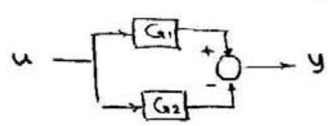
* قواعد کاهش بلوک دیاگرام‌ها : (در شرطیکه تابع تبدیل تغییر نکند)

(۱) قانون سری و پارالل:



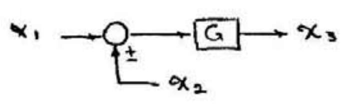
$y = G_1 G_2 u$ (اثر بارگذاری نداشته باشیم)

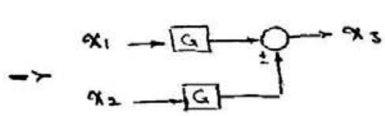
آر



$y = (G_1 + G_2) y$

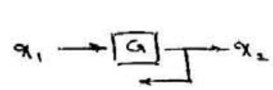
(۲)

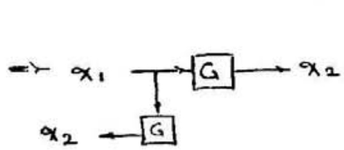




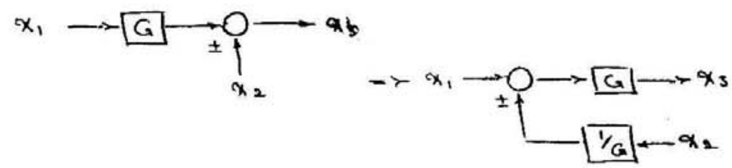
$x_3 = G(x_1 \pm x_2)$ $\qquad$ $x_3 = Gx_1 \pm Gx_2$

(۳)





(۴)

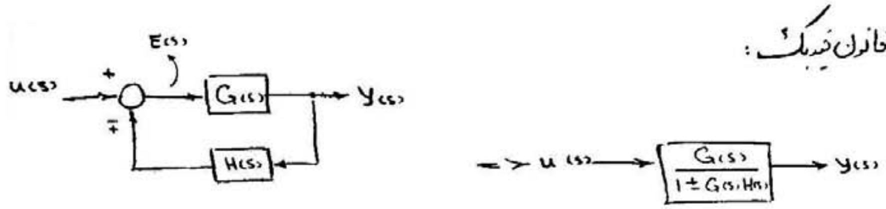


(۵)

$x_3 = Gx_1 \pm x_2$

$x_3 = G(x_1 \pm \frac{1}{G}x_2)$

(۶) قانون فیدبک:



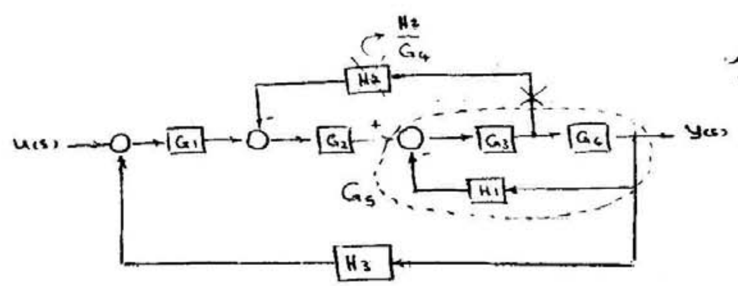
$$E(s) = U(s) \mp H(s)Y(s)$$

$$\left.\begin{array}{l} E(s) = U(s) \mp H(s)Y(s) \\ Y(s) = G(s)E(s) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(s) = G(s)\left(U(s) \mp H(s)Y(s)\right)$$

$$\Rightarrow Y(s)\left(1 \pm G(s)H(s)\right) = G(s)U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

(−) : فیدبک مثبت
(+) : فیدبک منفی

۲*
*مثال: بلوک دیاگرام را ساده کنید.



$G_5 = \dfrac{G_3G_4}{1+G_3G_4H_1}$ $\quad G_6 = G_2 \cdot G_5$ $\quad G_7 = \dfrac{G_6}{1+\dfrac{G_6H_2}{G_4}}$

$G_8 = G_1G_7$ $\quad G_9 = \dfrac{G_8}{1+G_8H_2}$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 - G_3G_4H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3G_4H_3}$$

* قضیه مقدار نهائی:

اگر $x(t)$ برای $t<0$ برابر صفر باشد و نیز شامل هیچ ضربه یا حداقل درحالت بالا (مشتقات آن) نباشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

* جلسه پنجم: سه‌شنبه: ۸۱/۱۲/۱۳

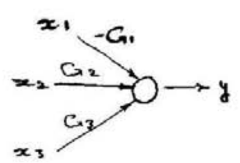
مدل گذر سیگنال: (Signal flow graph)

مزایا: پروسه طولانی و پیچیده نیست به نقاط خروجی نیاز نیست

اساس آن: نمایش سیستم توسط پاره‌خطهاست ← درمدل گذرسیگنال با دو عنصر سروکار داریم: گره، شاخه جهت‌دار
و این مدل متشکل از تعدادی گره است که توسط پاره‌خط‌های جهت‌دار (شاخه) به یکدیگر متصل شده‌اند.

$u \to \boxed{G} \to y$ مدل دیاگرام بلوکی

$\xrightarrow{G}$ مدل گذر سیگنال



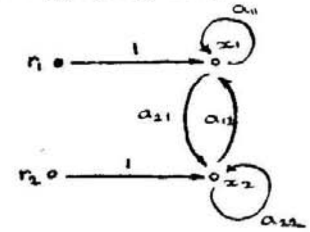
$\Rightarrow y = G_2x_2 + G_3x_3 - G_1x_1$

- بهره شاخه روی آن نوشته می‌شود.
- خروجی گره بیانگر متغیری داخل سیستم است
- خروجی گره، جمع جبری متغیرهای وابسته به آن است
- هر متغیر با یک گره نشان داده می‌شود.

- این مدل برای حل معادلات جبری خطی بود.

* مثال: مدل گذر سیگنال را برای معادلات زیر بیابید:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2 \end{cases}$$



• تعاریف در نمایش گذر سیگنال:

(۱) - مسیر (path): یک گره را به گره دیگر در جهت پیکان متصل می‌کند. (می‌تواند مسیر از چندین گره عبور کند)

مثال: r_1 به x_2 (با در نظر گرفتن فیدبک) :P_3 $\quad$ $P_2: x_2 \leftarrow r_1$ $\quad$ $P_1: x_1 \leftarrow r_1$

(۲) - مسیر مستقیم (forward path): یک گره را به گره دیگر متصل می‌کند (از هر گره فقط یک بار عبور می‌کنیم).

P_1 $\quad$ P_2 $\quad$ $\cancel{P_3}$

(۳) - بهره مسیر (path gain): حاصلضرب بهره تمام شاخه‌های داخل مسیر

$P_2 : 1 \times a_{21}$ $\qquad$ $P_3 : 1 \times a_{21} \times a_{22}$

(۴) - بهره مسیر مستقیم: حاصلضرب بهره تمام شاخه‌های داخل مسیر مستقیم است.

(۵) - حلقه (loop): مسیر مستقیمی است که هر گره را به خودش متصل می‌کند (از هر گره فقط یک بار عبور می‌کنیم)

$L_1: x_1 \leftarrow x_1$ $\qquad$ $L_2: x_2 \leftarrow x_2$ $\qquad$ $L_3: x_2 \leftarrow x_1$ یا $x_1 \leftarrow x_2$

(۶) - (Non-touching Loop) حلقه‌هایی که با یکدیگر تماس ندارند (همدیگر را قطع نمی‌کنند): حلقه‌هایی که گره مشترک ندارد.

* حل دستگاه‌ها به کمک روش کرامر:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x_1(1-a_{11}) - a_{12}x_2 = r_1 \\ x_2(1-a_{22}) - a_{21}x_1 = r_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{(1-a_{22})r_1}{\Delta} + \dfrac{a_{12}}{\Delta} r_2 \\[2ex] x_2 = \dfrac{(1-a_{11})r_2}{\Delta} + \dfrac{a_{21}}{\Delta} r_1 \end{cases}$$

$$\Delta = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

در بیان دستگاه گراف:

$$\Delta = 1 - \underbrace{(L_1 + L_2 + L_3)}_{\text{مجموع تمام حلقه‌ها}} + \underbrace{L_1 L_2}$$

$\hookrightarrow$ حاصلضرب بهره حلقه‌هایی که همدیگر را قطع نمی‌کنند

- بهره مسیر مستقیم (1):

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{1-a_{22}}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

حلقه‌ای که داخل این مسیر دیگر واقع شده در این مسیر: (L_1, L_3) ←

$$\Delta_1 = \Delta \Big|_{\text{بهره حلقه‌های داخل مسیر ۱}} = 1 - L_2$$

برای جمع‌بندی و تکمیل این روش، «فرمول بهره میسون» را بیان می‌کنیم.

* فرمول بهره میسون: (Mason Gain Formula)

به کمک این روش توابع تبدیل از هر گره خروجی (j) به هر گره ورودی (i) را می‌توان به کمک این روش یافت.

- گره خروجی: گره‌ای که سیگنال به جایی ارسال نکند.

- گره ورودی: گره‌ای که سیگنال به آن وارد نشود.

تذکر: هر گره گراف را می‌توان به یک گره خروجی تبدیل کرد (با اضافه کردن یک گره دیگر تحت گره مورد نظر به گره جدید ← یک گره خروجی تبدیل می‌شود.

و اما فرمول بهره میسون:

$$T_{ij} = \frac{\sum_{k}^{N} P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

* توضیحات:

(a) T_{ij}: تابع تبدیل (transfer function) از متغیر خروجی x_j به متغیر ورودی x_i

b) P_K : بهره مستقیم مسیر K-ام از x_i به x_j

c) N : تعداد مسیرهای مستقیم بین x_i و x_j

d) Δ : دترمینان گراف

e) Δ_K : کوفاکتور مسیر K-ام

فرم کلی Δ :

$$\Delta = 1 - \sum_n L_n + \sum L_m L_q - \sum L_p L_r L_s + \cdots$$

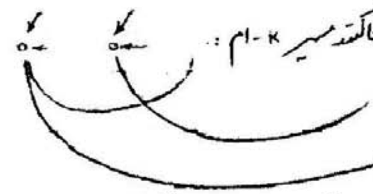
$-1 =$

L_n : تمام حلقه‌های سیستم

L_m , L_q : هر دو حلقه‌ای که همدیگر را قطع نمی‌کنند.

L_p , L_r , L_s : هر ۳ حلقه‌ای که همدیگر را قطع نمی‌کنند.

فرم کلی کوفاکتور مسیر K-ام :

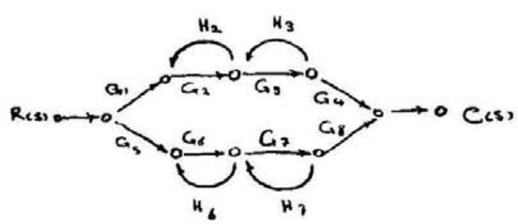


$\Delta_K = \Delta \big|$ بهره حلقه‌های داخل مسیر K-ام را صفر قرار می‌دهیم (حلقه‌هایی که حداقل یک گره در این مسیر دارند).

تذکر: با توجه به فرم بیان شده، مخرج کسر تابع تبدیل، تابع انتخاب ورودی-خروجی نیست و همانطور که قبلاً گفته شد تابع interconnection اعضای سیستم است.

+ مثال:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$



حل: تعداد مسیرها از ورودی به خروجی: ۲ ← $N = 2$

بهره مسیرها را می‌نامیم:

$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$

$P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$

تعداد حلقه‌ها: 4 ← بهره حلقه‌ها را می‌نامیم:

$L_1 = G_2 H_2 \qquad L_2 = G_3 H_3$

$L_3 = G_6 H_6 \qquad L_4 = G_7 H_7$

اکنون باید NTL (non-touching loop) را بیابیم:

NTL: L_1 و L_3, L_4

L_2 و L_3, L_4

طبق فرمول داریم:

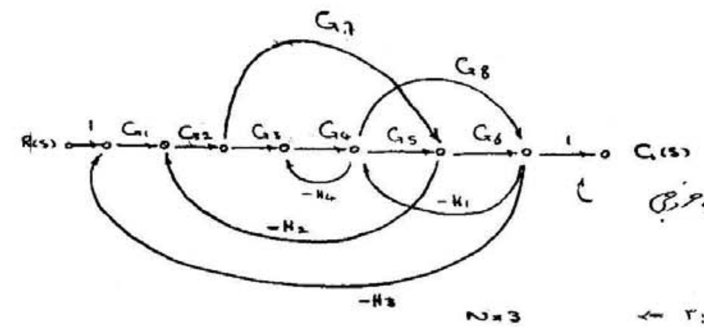
$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

تنها کافیست Δ، Δ_1، Δ_2 را بیابیم:

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3+L_4) + L_1L_3 + L_2L_3 + L_1L_4 + L_2L_4$$

$$\Delta_1 = \Delta\Big|_{L_1=L_2=0} = 1-(L_3+L_4) \qquad \Delta_2 = \Delta\Big|_{L_3=L_4=0} = 1-(L_1+L_2)$$

مثال: $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$



تبدیل کردن به گره خروجی

تعداد مسیر مستقیم از ورودی به خروجی: ۳ ← $N=3$

$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6 \qquad P_2 = G_1G_2G_7G_6 \qquad P_3 = G_1G_2G_3G_4G_8$

حلقه‌ها:

- تذکر: حلقه‌ها توسط عناصر فیدبک ایجاد می‌شوند.

مسیر فیدبک H_1 دو حلقه ایجاد می‌کند
$$\begin{cases} L_1 = -G_5G_6H_1 \\ L_2 = -G_8H_1 \end{cases}$$

مسیر فیدبک H_2 دو حلقه ایجاد می‌کند
$$\begin{cases} L_3 = -G_2G_3G_4G_5H_2 \\ L_4 = -G_2G_7H_2 \end{cases}$$

مسیر فیدبک H_3 سه حلقه ایجاد می‌کند
$$\begin{cases} L_5 = -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_3 \\ L_6 = -G_1G_2G_3G_4G_8H_3 \\ L_7 = -G_1G_2G_7G_6H_3 \end{cases}$$

H_4 داخل مسیر فیدبک : $L_8 = -G_4 H$

می رویم سراغ حلقه‌های بدون گره مشترک (NTL) :

$(L_4, L_8) \quad (L_2, L_4) \quad (L_7, L_8)$

پس از دادن همه‌ی اطلاعات لازم می‌پردازیم به فرمول :

$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta}$$

تنها کافیست Δ و کوفاکتورها را بیابیم :

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + \cdots + L_8) + L_2L_4 + L_7L_8 + L_4L_8$$

$$\Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = \Delta\Big|_{L_1 = \cdots = L_6 = L_7 = 0} = 1 - L_8 \qquad \Delta_3 = 1$$

نکته : گفتیم روش میسون برای یافتن تابع تبدیل متغیر خروجی به متغیر ورودی است و ضمناً تعریف متغیر خروجی و ورودی را بیان کردیم. و ضمناً بیان کردیم تبدیل یک گره به گره خروجی کاری ندارد ولی گره ورودی غیر قابل تغییر است. با این تفاصیل برای یافتن تابع تبدیل میان هر دو نقطه دلخواه باید به روش زیر عمل کرد :

$x(s)$: نقطه میانی دلخواه

$$T(s) = \frac{C(s)}{x(s)} \longrightarrow T(s) = \frac{C(s)}{x(s)} = \frac{C(s)}{R(s)} \times \frac{R(s)}{x(s)} = \frac{\frac{C(s)}{R(s)}}{\frac{x(s)}{R(s)}}$$

→ در این مواقع باید دوبار از روش میسون کمک بگیریم.

نمایش سیستمهای چند ورودی - چند خروجی : MIMO Multi Input - Multi Output

$$\begin{cases} y_1 = G_{11} r_1 + \cdots + G_{1n} r_n \\ \vdots \\ y_m = G_{m1} r_1 + \cdots + G_{mn} r_n \end{cases}$$

n : ورودی

m : خروجی

$$G_{ij} = \frac{y_i}{r_j}\Big|_{r_k = 0 \quad k \neq j}$$

خروجی : $i = 1, \ldots, m$

ورودی : $j = 1, \ldots, n$

نمایش ماتریسی :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \qquad G = [G_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

$$Y = G.R$$

ماتریس خروجی — ماتریس ورودی — ماتریس تابع تبدیل

... ما در درسهای کنترل خطی، با سیستمهای تک ورودی تک خروجی سروکار داریم:

Single Input Single Output (SISO)

* نمایش فضای حالت :

- تاکنون تنها در مورد رابطهٔ میان ورودی و خروجی بحث کردیم و کاری به متغیرهای درون سیستم نداشتیم.

- فرم تابع تبدیل تنها برای سیستم های LTI کاربرد داشت. ما نیاز به فرم کلی داریم.

- برای رهایی از این دو قید، فضای حالت مطرح می شود:

* ویژگیهای نمایش فضای حالت :

(۱) اطلاعات بیشتری از داخل سیستم به ما می دهد. (متغیرهای داخلی)

(۲) برای نمایش تمام سیستمها می تواند بکار رود (خطی یا غیرخطی ، TI یا TV)

(۳) برای شبیه سازی مناسب تر است (چون به فرم زمانی است)

(۴) مبنای تئوری کنترل مدرن است (در مبنای شبیه سازی کامپیوتری تابع برنامه شکل گرفته است).

* تعریف حالت یک سیستم: ($x(t)$)

مینیمم اطلاعاتی که اگر در زمان t_0 موجود باشد، (همراه $u(t)$, $t \geq t_0$) ، بتوان خروجی سیستم را به ازای $t \geq t_0$ می توانیم داشته باشیم.

متغیرهای حالت یک سیستم یکتا (unique) نیست.

شکل کلی نمایش متغیرهای حالت:

بطور کلی، معادله حالت، نمایش n معادله دیفرانسیل مرتبه یک است. که n تعداد متغیرهای حالت است.

کلی ترین فرم معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, u, t) \end{cases}$$

پروسه تبدیل فرم کلی به فرم مناسب برای سیستم های LTI:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, u, t) \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف وابستگی به زمان}} \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \longrightarrow$$

(در اینجا برای سیستم های TI)

$$\xrightarrow{\text{خطی سازی}} \underbrace{\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}}$$

نمایش متغیرهای حالت برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

$$\underset{a}{U[\cdot]} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \underset{d}{[\cdot \quad 1]} = E$$

+ جلسه ششم: ۸۱/۱۲/۱۸ یکشنبه:

• مدل سازی فضای حالت:

با مثال به ادامه بحث می پردازیم:

سیستم جرم و فنر و دمپر

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = f(t)$$

• هرگاه فرم معادله دیفرانسیل بالا این گونه باشد (یعنی ورودی یک طرف و در طرف دیگر خروجی و مشتقاتش باشند) سپس خروجی کاندیدای مناسبی برای متغیر حالت است.

برای سیستم درجه دو، با دو متغیر حالت می‌توان سیستم را مدل کرد:

در مثال اخیر:
$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

$\dot{x} = Ax + B$: معادله حالت

$y = Cx + D$: معادله خروجی

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \to \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \to \dot{x}_2(t) = ? \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad m\ddot{y} + ky + b\dot{y} = f(t) \to \ddot{y} = \frac{1}{m}(f - b\dot{y} - ky) \to$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}(u - bx_2(t) - kx_1(t)) \to$$

بیان به فرم ماتریسی:

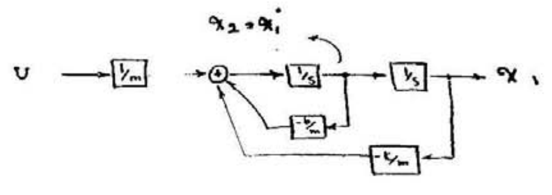
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}^{A} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} u$$

* توضیح در مورد ماتریسهای چهارگانه استفاده شده در معادلات حالت:

بفرض : $x \in R^n$ ، $y \in R^p$ ، $u \in R^m$

(a) ماتریس A : ماتریس حالت سیستم است. ماتریس حالت بیانگر interconnection حالتهای سیستم است ماتریس $n \times n$ است.



برای مثال اخیر:

ماتریس B :

(b) ماتریس ورودی نامیده می‌شود (یعنی نشان می‌دهد ورودیها چگونه روی حالتها اثر می‌گذارند) و $n \times m$ است

تنها عامل کنترل کننده u است ← اگر $B = 0$ ← هیچ کنترلی نداریم.

ماتریسهای A و B کنترل پذیری سیستم را نشان می‌دهند.

(c) ماتریس C: ماتریس خروجی است که اثر متغیرهای حالت بر خروجی را نشان می‌دهد. و از مرتبه pxn است.

این ماتریس «رویت پذیری» یا «مشاهده پذیری» (Observability) سیستم را بیان می‌کند.

به این معنی که در بعضی موارد می‌توان با دیدن خروجی، تغییر حالت سیستم را تخمین زد. (برای مثال در مواردیکه متغیر حالت اندازه‌گیری باشد و یا وسیله اندازه‌گیری پرهزینه‌ای را طلب کند، از این حالت استفاده می‌شود).

این بخش یعنی با این شرط مفید است که متغیرهای حالت در خروجی تاثیر داشته باشند و ماتریس C این اثر را بیان می‌کند.

(d) ماتریس D: ماتریس کوپلینگ مستقیم ورودی به خروجی است. و از مرتبه pxm است.

جمع بندی:

$$\begin{cases} x\in R^n \\ Y\in R^p \\ U\in R^m \end{cases} \Longrightarrow \text{ابعاد ماتریسهای معادلات حالت:} \begin{cases} A\in R^{n\times n} \\ B\in R^{n\times m} \\ C\in R^{p\times n} \\ D\in R^{p\times m} \end{cases}$$

* تذکر: در تابع تبدیل بفرم $\frac{S^m+\dots}{S^n+\dots}$، اگر $n<m$ ← حقیقی نیست و معادله حالت ندارد.

$n>m$ ← ماتریس D صفر است.

$n=m$ ← ماتریس D صفر نیست.

کوئیز: معادله حالت مربوطه $G(s)=s$ را بیابید.

در صورت بیشتر از مخرج است ← معادله حالت ندارد. $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s}{1}$

* مثال: معادلات حالت را بیابید:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + K_1\dot{y}_1 + K_2 y_1 = u_1 + K_3 u_2 \\ \dot{y}_2 + K_4 y_2 + K_5 \dot{y}_1 = K_0 u_1 \end{cases}$$

حل: ورودیها: u_1, u_2 خروجیها: y_1, y_2 ← $p=2$

نیاز به ۳ متغیر حالت داریم: $(n=3)$

$$x_1(t)=y_1(t) \qquad x_2(t)=\dot{y}_1(t) \qquad x_3(t)=y_2(t)$$

$$\dot{x}_1=x_2 \qquad \dot{x}_2=\ddot{y}_1(t)=u_1+k_3u_2-k_1\dot{y}_1-k_2y_1=u_1+k_3u_2-k_1x_2-k_2x_1$$

$$\dot{x}_3=\dot{y}_2=-k_4y_2-k_5\dot{y}_1+k_0u_1=k_0u_1-k_4x_3-k_5x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} A\in R^{n\times n} \\ n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow A_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_5 & -k_4 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times 2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k_0 \\ k_0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ← هیچگونه کوپلینگ مستقیمی بین ورودی خروجی وجود ندارد.

* حل معادلات حالت و ماتریس انتقال حالت : (State Transition Matrix)

حل معادلات حالت در واقع حل دسته معادلات دیفرانسیل است.

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$\rightarrow sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s) \rightarrow (sI-A)X(s)=x(0)+BU(s) \rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}[x(0)+BU(s)]$$

تعریف ماتریس انتقال حالت : $\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$ $\qquad \phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

$$\Rightarrow X(s)=\Phi(s)x(0)+\Phi(s)BU(s)$$ ← عکس لاپلاس می گیریم ←

$$x(t)=\underbrace{\phi(t)x(0)}_{\text{پاسخ ورودی صفر}}+\underbrace{\int_0^t \phi(t-\lambda)Bu(\lambda)\,d\lambda}_{\text{پاسخ حالت صفر (شرایط اولیه صفر)}}$$

تذکر: آن چیزی که رفتار سیستم را مشخص می کند $\phi(t)$ است و بدیهی است $\phi(t)$ تنها به ماتریس A بستگی دارد.

* مثال: $x\in R$ ، $u\in R$ ، $y\in R$

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx \end{cases}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• ماتریس انتقال حالت را بیابید:

$$SI-A = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ +2 & s\end{bmatrix} \to |SI-A| = s(s+3)+2 \to (SI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s & +1 \\ -2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$$

$$\to (SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \Phi(s) \to \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} \Rightarrow$$

فرم کلی: $\Phi(t) = [k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t}]_{2\times 2}$

• نکته: رفتار زمانی سیستم توسط ریشه‌های $\det(SI-A)=0$ مشخص می‌شود $\Leftarrow$ $\Phi(s) = (SI-A)^{-1} = \frac{adj(SI-A)}{|SI-A|}$

به عبارت دیگر، رفتار سیستم توسط $\lambda_i(A)$ و V_i (مقادیر ویژه ماتریس A) مشخص می‌شود.

— روش دیگر برای یافتن $\Phi(t)$: « روش سری نامتناهی »

$\dot{x} = Ax + B \qquad \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(SI-A)^{-1}\}$

$$x(t) = (K_0 + K_1 t + \frac{K_2}{2!}t^2 + \cdots)x_0 = A(K_0 + K_1 t + \frac{K_2}{2!}t^2 + \cdots)x_0 \qquad \begin{matrix} K_1 = AK_0 \\ K_2 = AK_1 \\ \vdots \end{matrix}$$

با انتخاب در نظر داریم:

$K_0 = I \qquad K_1 = A \qquad K_2 = \frac{A^2}{2!}$

$$\to \Phi(t) = (I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots) \triangleq e^{At}$$

* ارتباط درایه‌های ماتریس انتقال حالت با مقادیر ویژه ماتریس A:

در مثال اخیر: $\underbrace{e^{-2t}, e^{-t}}_{\text{درایه‌های ماتریس انتقال}} \qquad \left.\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}\right\}$ مقادیر ویژه ماتریس حالت

V_i بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ_i باشد:

$$\begin{cases} A v_i = \lambda_i v_i \\ \phi(t) v_i = e^{At} v_i = e^{\lambda_i t} \cdot v_i \end{cases} \qquad e^{At} = (I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots)$$

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

$$A^2 v_i = A(A v_i) = A \lambda_i v_i = \lambda_i^2 v_i$$

$$\vdots$$

$$A^n v_i = \lambda_i^n v_i$$

$$\rightarrow e^{At} v_i = (I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots) v_i = \underbrace{(1 + \lambda_i t v_i + \frac{\lambda_i^2 t^2}{2!} + \dots)}_{e^{\lambda_i t}} v_i = e^{\lambda_i t} v_i$$

بردار ویژه ماتریس A و ماتریس انتقال حالت $\phi(t)$ با هم برابرند. و بردار ویژه متناظر آن نیز $e^{\lambda_i t}$ می‌باشد.

$$e^{At} v_i = e^{\lambda_i t} \cdot v_i$$

* پاسخ ورودی صفر را در نظر بگیرید:

$$x_{zi}(t) = e^{AT} x_0 \searrow e^{\lambda_i t} x_0$$

x_0 بردار ویژه متناظر با λ_i می‌باشد.

یعنی در تمام خروجی‌ها، فقط مود (مقدار ویژه) λ_i ظاهر می‌شود.

برای آنکه بخواهیم سیستم استیشنری بماند، شرایط اولیه را برابر بردار ویژه یکی از مقادیر ویژه ماتریس قرار می‌دهیم. (؟!)

* جلسهٔ نهم: سه‌شنبه: ۸۱/۱۲/۲۰

• دستیابی به تابع تبدیل از معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\text{Laplace}} \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = C \cdot X(s) + DU(s) \end{cases} \rightarrow (sI - A)X(s) = B \cdot U(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1} B U(s) + DU(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

یادآوری: تابع تبدیل نسبت تبدیل خروجی به ورودی تحت شرایط اولیه صفر است.

اکنون می‌خواهیم رابطه تابع تبدیل را با معادله حالت نسبت دهیم:

$$G(s) = C \cdot \frac{\mathrm{adj}(sI-A)}{|sI-A|} \cdot B + D$$

* قطبهای تابع تبدیل:

- ریشه‌های مخرج $G(s)$، ریشه‌های $\underbrace{\det(sI-A)=0}^{\text{معادله مشخصه سیستم}}$ است.

یا به عبارت دیگر قطبهای تابع تبدیل، همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

تمام قطبهای تابع تبدیل خود مقادیر ویژه ماتریس A هستند، اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست.

* صفرهای تابع تبدیل:

صفرهای تابع تبدیل، ریشه‌های معادله $C \cdot \mathrm{adj}(sI-A) \cdot B = A - I2$ است.

* نتیجه: صفرهای تابع تبدیل به نحوه انتخاب ورودی و خروجی وابسته است. اما قطبها مستقل از ورودی ـ خروجی است.

- تذکر: ممکن است در یک مسیر ورودی ـ خروجی، بعضی قطبها با صفرها حذف شوند که در این صورت تمامی مقادیر ویژه جزو قطبهای یک تابع تبدیل خاص نخواهند بود و اصطلاحاً حذف صفر و قطب گویند.

(pole-zero canellation)

* پایداری:

* پایداری BIBO:

$$Y(s) = \frac{s^m + \cdots}{s^n + \cdots} \cdot U(s) \rightarrow Y(s) = \left(\frac{k_1}{s+\alpha_1} + \frac{k_2}{s+\alpha_2} + \cdots + \frac{k_n}{s+\alpha_n}\right) \cdot U(s)$$

$$\rightarrow y(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + \cdots + k_n e^{-\alpha_n t} + \underbrace{\cdots}_{\text{وابسته به ورودی}}$$

برای پایداری، ترمهای نمایی باید میرا باشند:

$\rightarrow$ αها باید منفی نباشند $\rightarrow$ αها باید اکیداً مثبت باشند یعنی ریشه‌های مخرج تابع تبدیل (قطبها) باید اکیداً منفی باشند.

* پایداری داخلی :

- در این نوع پایداری، همهٔ سیگنالهای داخل سیستم bounded هستند.

به عبارت دیگر توابع تبدیل از همهٔ خروجیها به همهٔ ورودیها باید BIBO باشد.

توضیح : $y = Cx + Du$ ← با ورودی محدود، اگر x هم محدود باشد ← خروجی هم محدود می‌شود.

از طرفی $x(t) = \Phi(t)x_0 + \int \Phi(\tau) B u(t-\tau) d\tau$

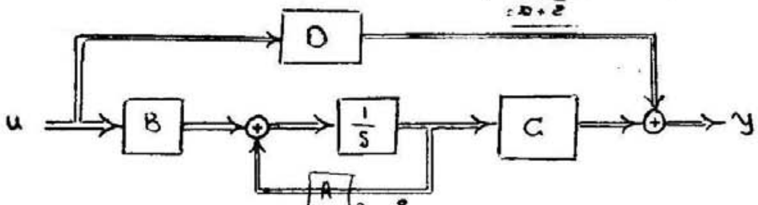
← برای محدود بودن $x(t)$ باید $\Phi(t)$ هم محدود باشد و داریم : $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

← ریشه‌های $\det(sI-A)=0$ باید اکیداً منفی باشند تا قطبهای همهٔ توابع تبدیل از هر خروجی به هر ورودی، BIBO باشد. به عبارت دیگر ماتریس انتقال حالت ($\Phi(t)$) محدود باشد.

- اگر حذف صفر و قطب سمت راست صفحه s (RHP) نداشته باشیم، این دو پایداری معادلند اما اگر این امر حادث شود، بعضی از مقادیر ویژه ماتریس A که در RHP است ممکن است با انتخاب بعضی ورودی - خروجیها حذف شوند و در تابع تبدیل ظاهر نشوند ولی بعضی از ورودی خروجی‌های دیگر ظاهر شوند با این سیستم پایدار داخلی نخواهد بود.

* تحقق یک تابع تبدیل : (یافتن معادلات حالت از روی تابع تبدیل)

منظور از تحقق این است که شکلی از تابع تبدیل مورد نظر خود را بسازیم (بحث اصلی در فیلتر و سنتز می‌باشد)



اگر معادلات حالت موجود باشند، دیاگرام فوق به راحتی قابل ساخت است. (قابل تحقق است)

← می‌خواهیم معادلات حالت را از روی تابع تبدیل مورد نظر خود بسازیم :

• شرط آنکه بتوان از روی تابع تبدیل، معادلات حالت را یافت (تحقق حالت داشته باشیم)، است که :

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0}\qquad : m\leq n$$

تذکر: البته در حالت $m=n$ باید به شکل زیر عمل کرد :

مثال:

$$G(s)=\frac{s^3+3s^2+4s-1}{s^3+5s^2+4s+1}=1+\underbrace{\frac{-2s^2-2s}{s^3+5s^2+4s+1}}_{m<n}$$

در این عدد ثابت، بلوک D دیاگرام حالت نقش را نشان می‌دهد.

نتیجه: در حالت $m=n$ تابع تبدیل را تفکیک می‌کنیم به یک عدد ثابت و یک کسر با درجه صورت کمتر که عدد ثابت ایجاد شده با ایجاد تغییر در بلوک مستقیم ورودی خروجی (D) تأثیر بر سیستم می‌گذارد.

پس از توضیحات فوق، از این پس تنها تحقق‌های توابع تبدیل با درجه صورت کمتر از مخرج را بررسی می‌کنیم؛ یعنی به فرم زیر:

$$G(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\dots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_0}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b(s)}{a(s)}\quad\begin{matrix}\leftarrow \text{چندجمله‌ای صورت}\\ \leftarrow \text{چندجمله‌ای مخرج}\end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow a(s)Y(s)=b(s)U(s)$$

اکنون معادله دیفرانسیل این تابع تبدیل را می‌نویسیم :

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=b_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\dots+b_1 u'(t)+b_0$$

حالت (a) $\leftarrow\ b(s)=1$

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=u$$

• انتخاب متغیرهای حالت مناسب :

$$\begin{cases}x_1=y(t)\\ x_2=\dot y(t)\\ \vdots\\ x_n=y^{(n-1)}(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n \cdots -a_1x_2 - a_0x_1 + u \end{cases}$$

$$\downarrow \quad \overset{(n)}{y}(t) = u - a_{n-1}\overset{(n-1)}{y}(t) - \cdots - a_1\dot{y}(t) - a_0y(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

(ج)

(ط) فرم کانونیکال کنترل پذیر :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} \cdot b(s)$$

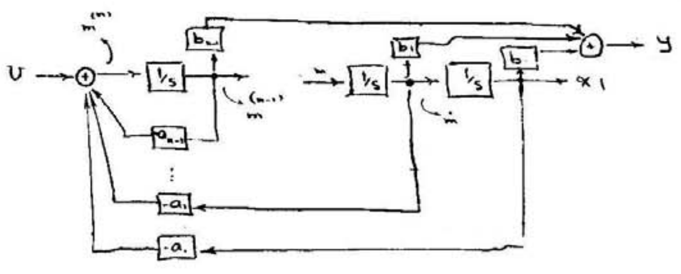
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \underbrace{\frac{Y(s)}{M(s)}}_{b(s)} \cdot \underbrace{\frac{M(s)}{U(s)}}_{\frac{1}{a(s)}}$$

در این روش ابتدا $\frac{M(s)}{U(s)}$ را محقق می کنیم :

برای تحقق $\frac{M(s)}{U(s)}$ از حالت (a) عمل می کنیم

$$\overset{(n)}{m}(t) + a_{n-1}\overset{(n-1)}{m}(t) + \cdots + a_1\dot{m}(t) + a_0m(t) = u(t)$$

$$\downarrow \quad \begin{cases} x_1 = m(t) \\ x_2 = \dot{m}(t) \\ \vdots \\ x_n = \overset{(n-1)}{m}(t) \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



تحقق : $\frac{Y(s)}{M(s)}$

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = b(s) \Rightarrow y(t) = b_{n-1}\overset{(n-1)}{m}(t) + \cdots + b_1\dot{m}(t) + b_0m(t)$$

$$= b_{n-1}x_n + \cdots + b_1x_2 + b_0x_1 \rightarrow$$

$$y(t) = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n-1}]\,x$$

به این تحقق، به این علت کانونیکال گویند که فرم ماتریس‌ها مشخص است.

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0_{n-1} & & I_{(n-1)} & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \cdots & -a_{n-1} \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}]$$

۹ . ۱ (ب) تحقق کانونیکال رؤیت‌پذیر:

یادآوری: تحقق یعنی مشخص کردن ارتباط y و u بدون آنکه مشتق‌گیری از u نیاز باشد.

برای بیان مطلب از تابع تبدیل با مخرج درجه ۳ به عنوان مثال کمک می‌گیریم:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\Rightarrow \quad y^{(3)}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$b_0 u - a_0 y = y^{(3)}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) - b_2 \ddot{u}(t) - b_1 \dot{u}(t)$$

با انتگرال‌گیری: $\ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) - b_2 \dot{u}(t) - b_1 u(t)$

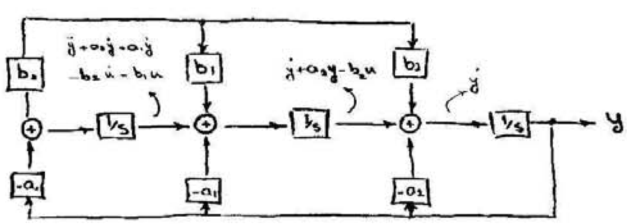
با اضافه کردن $b_1 u - a_1 y \rightarrow$

$$\ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) - b_2 \dot{u}(t)$$

با انتگرال‌گیری:

$$\dot{y}(t) + a_2 y(t) - b_2 u(t)$$

با اضافه کردن $-a_2 y + b_2 u$ و ...



بهترین انتخاب برای متغیرهای حالت از روی بلوک دیاگرام‌ها، خروجی انتگرال‌گیرهاست.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - a_2 x_1 + b_2 u \\ \dot{x}_2 = x_3 - a_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_3 = -a_0 \; - x_1 + b_0 u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \;\; 0 \;\; 0]$$

* درحالت کلی، فرم ماتریسهای تحقق کانونیکال رویت پذیر بصورت زیر است:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -a_{n-1} & \\ -a_{n-2} & I_{n-1} \\ \vdots & \\ -a_0 & 0_{n-1} \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0]$$

رویت پذیری یعنی، تمام حالتها از خروجی مشاهده شوند.

* جلسه هشتم: یکشنبه: ۸۲/۱/۱۷

* کوییز: تحقق کنترل پذیر را بیابید و در مورد پایداری بحث کنید

$$G(s)=\frac{s^2-s-2}{s^2+s-6}$$

$$G(s)=1+\frac{-2s+4}{s^2+s-6} \qquad A=\left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\text{منفی ضرایب مخرج}} \end{array}\right] \qquad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad C=[\text{ضرایب صورت}] \;,\; D=1$$

$$G(s)=\frac{(s+1)(s-2)}{(s-2)(s+3)} \longrightarrow$$ پایدار داخلی نیست ولی پایدار BIBO می باشد.

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\6&-1\end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_1=2,\; \lambda_2=-3$$ در عبارت دیگر: پایدار داخلی نیست $\leftarrow 2>0$

* تبدیل تشابهی: Similarity Transform

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \qquad x=P\underbrace{v}_{\text{متغیر حالت جدید}}$$

معادلات حالت v را می خواهیم بدست آوریم:

$$x=Pv \rightarrow \dot{x}=P\dot{v} \qquad \hookrightarrow v=P^{-1}x$$

$$\rightarrow \begin{cases}P\dot{v}=APv+Bu\\ y=CPv+Du\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dot{v}=P^{-1}AP\,v+P^{-1}Bu\\ y=CPv+Du\end{cases}$$

← ماتریسهای حالت متغیر جدید v عبارتند از:

$$A_v=P^{-1}AP$$

$$B_v=P^{-1}B$$

$$C_v=CP$$

$$D_v=D$$

تذکر: پایداری سیستم ارتباطی به نوع انتخاب متغیر حالت ندارد ← چون پایداری باید دست نخورد ← باید میان A و A_v رابطه ای باشد: مقادیر ویژه ماتریس A و A_v برابر است: یعنی: $\det(sI-A)=\det(sI-P^{-1}AP)$

• اثبات ریاضی:

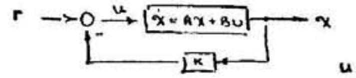
$$\det(sI-P^{-1}AP)=\det(P^{-1}sIP-P^{-1}AP)=\det(P^{-1}(sI-A)P)=$$
$$\det(P^{-1})\cdot\det(sI-A)\cdot\det(P)=\det(sI-A)$$

← با تغییر متغیر حالت، پایداری سیستم تغییری نمی‌کند (مقادیر ویژهٔ A و A_v یکی است)، اما بقیه خصوصیات سیستم ممکن است تغییر کند.

. کنترل پذیری و رویت پذیری :

ماتریسهای A و B در کنترل پذیری سیستم نقش دارند و ماتریسهای A و C در رویت پذیری سیستم نقش دارند.

ابتدا می‌پردازیم به اهمیت کنترل پذیری و رویت پذیری :



$$u = -Kx + r$$

$$\left.\dot{x} = Ax + Bu\right\} \rightarrow \dot{x} = Ax + B(-Kx + r)$$

$$\rightarrow \dot{x} = \underbrace{(A - BK)}x + Br$$

A_c : ماتریس حالت سیستم حلقه بسته : $\quad A_c = A - BK$

مشخصات سیستم (A, B) در اختیار ما نیست. تنها اهرم کنترل، K است. منظور از کنترل پذیری این است که ماتریس K ای بیابیم که مقادیر ویژه را هر جا خواستیم، قرار دهیم.

_ یعنی : . یافتن K برای تخصیص مقادیر ویژه ماتریس $A_c = A - BK$.

کنترل پذیری یعنی ماتریس K ای وجود دارد که مقادیر ویژه ماتریس $A - BK$، را به دلخواه در صفحه S قرار دهیم (pole -
(assignment placement

$9A^{-1}9 - vH$

Matlab Code: place (A, B, P)

* سیستمی کنترل پذیر است که ماتریس کنترل پذیری آن، Full Rank باشد.

rank (رتبه) : تعداد سطرهایی از ماتریس که مستقل خطی اند.

Full rank بودن : یعنی معکوس پذیر بودن، یعنی دترمینان صفر نشدن (برای ماتریسهای مربعی)

- تعریف ماتریس کنترل پذیری سیستم : $\quad C_v = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$

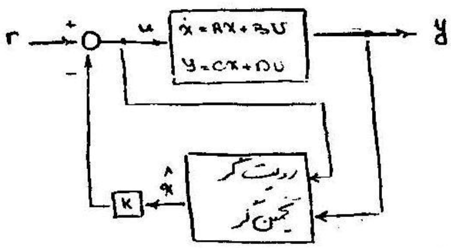
* همیشه حالتهای سیستم در دسترس نیست (یا اقتصادی نیست)، یعنی همیشه، کنترل کردن به روش $u = -Kx + r$ ،

مقدور نمی‌باشد. در این نقطه مفهومی به نام «رویت پذیری» ارائه می‌کنیم:

تا بتوان با اندازه‌گیری ورودی و خروجی، x را تخمین زد:

$u = -K\hat{x} + r$

تخمین x



برای آنکه بتوانیم x را تخمین بزنیم، باید ماتریسهای A و C، ویژگی خاصی داشته باشند:

برای آنکه بتوانیم x را تخمین بزنیم (یعنی سیستم رویت پذیر باشد) باید ماتریس رویت پذیری، Full Rank باشد.

(A)

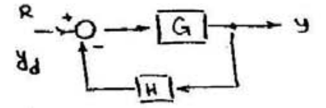
- تعریف ماتریس رویت پذیری سیستم:

$$C_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

* Matlab Code:

```
>> Rank
>> CTRB(A,B) → Cv
   OBSV(C,A) → Co
```

• مشخصات سیستم کنترل فیدبک؟:



مفاهیمی که در این بخش بحث خواهد شد:

- تعیین سیگنال خطا (در حالت حلقه باز هیچ حسی (sens) از خروجی نداریم تا آن را با خروجی مطلوب مقایسه کنیم)
- تعیین پاسخ حالت گذرا
- حساسیت سیستم به تغییر پارامترها
- اثر سیگنال اغتشاش
- هزینه فیدبک.

(A) سیگنال خطا:

هدف این است که u مناسب را بیابیم که y به y_d (خروجی مطلوب) نزدیک شود:

Find U s.t. $y \to y_d$ desired

خطای تعقیب: Tracking Error : $e = y_d(t) - y(t)$

خطای عملگر: Actuator Error: $e_a(t) = y_d(t) - Hy(t)$

اگر سیستم فیدبک واحد باشد $(H=1)$ ⇐ $e(t) = e_a(t)$

$E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}$

$$\frac{E_a(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+GH} \qquad H=1 \Rightarrow \frac{E_a(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G}$$

واضح است که برای کاهش E، باید GH بزرگ باشد.

GH : گین حلقه (loop gain)

تذکر: البته برای کاهش خطا، G را تا بینهایت نمی‌توانیم بزرگ کنیم: به دو دلیل، (1) الزامات عملی ساخت (2) زیاد کردن G ممکن است موجب ناپایداری شود.

(B) حساسیت سیستم کنترل به تغییر پارامترها :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+GH} \rightarrow Y(s) = \frac{G}{1+GH} \cdot R(s)$$

$$Y(s) \approx \frac{1}{H(s)} \cdot R(s) \leftarrow GH \gg 1$$

که در این حالت پارامترهای سیستم هیچ تأثیری ندارند (G تأثیری ندارد)

← برای فراهم آوردن حساسیت کمتر به تغییر پارامترها، باید G بزرگ باشد.

الان به بررسی کمی حساسیت می‌پردازیم :

فرض G(s) تغییراتی به شکل ΔG دارد :

حلقه باز : $R(s) \rightarrow \boxed{G} \rightarrow Y(s)$

$$\rightarrow Y(s) = R(s) \cdot [G(s) + \Delta G(s)] = G(s)R(s) + \Delta G(s) R(s)$$

$$\rightarrow \Delta Y(s) = \Delta G(s) \cdot R(s)$$

حلقه بسته :

$$Y(s) + \Delta Y(s) = \frac{G + \Delta G}{1 + H(s)(G(s) + \Delta G(s))} \cdot R(s)$$

$$\Delta Y(s) = \left(\frac{G+\Delta G}{1+(G+\Delta G)H} - \frac{G}{\underbrace{1+GH}_{\Delta(s) = 1+GH}}\right) \cdot R(s)$$

$$\Rightarrow \Delta Y(s) = \left[\frac{G+\Delta G}{\Delta(s) + \Delta G \cdot H(s)} - \frac{G}{\Delta(s)}\right] \cdot R(s) = \frac{\Delta(s) G(s) + \Delta(s)\Delta G(s) - [\Delta(s) + \Delta G \cdot H] G}{[\Delta(s) + \Delta G \cdot H(s)]\Delta(s)} \cdot R(s)$$

$$\rightarrow \Delta Y(s) = \frac{\Delta(s)\Delta G - \Delta G \cdot H \cdot G}{[\Delta(s) + \Delta G H]\Delta} \rightarrow \Delta Y(s) = \frac{\Delta G}{[\Delta(s) + \Delta G H(s)][1 + G H(s)]}$$

$(\Delta = 1 + GH)$

بر فرض : $\leftarrow H(s) \cdot G(s) \gg \Delta G H(s)$

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G}{(1 + G H(s))^2} \cdot R(s)$$

← با افزایش گین حلقه ← $\Delta Y(s)$ کم می‌شود.

* تعریف کلی حساسیت :

حساسیت : درصد تغییرات سیستم حلقه بسته به درصد تغییرات در سیستم حلقه باز

$T(s)$: سیستم حلقه بسته $G(s)$: سیستم حلقه باز

$$S_G^T = \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G}$$

در حالت حدی : $\Delta G \to 0 \Rightarrow S_G^T = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G} = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T}$

$T = \frac{G}{1+GH} \rightarrow S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{(1+GH)-GH}{(1+GH)^2} \rightarrow S_G^T(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$ تابع تبدیل حساسیت سیستم :

در سیستم حلقه باز: $T = G \rightarrow$ حساسیت $=1$

* حساسیت نسبت به المان فیدبک :

$T = \frac{G}{1+GH} \qquad S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} \rightarrow$

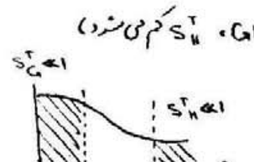
$S_H^T = \frac{-G^2}{(1+GH)^2} \cdot H \cdot \frac{(1+GH)}{G} \rightarrow S_H^T = \frac{-GH}{1+GH}$ تابع تبدیل مکمل حساسیت سیستم :

* به این دلیل مکمل گرفتیم که: $S_G^T - S_H^T = 1$

$S_H^T = -1 \leftarrow GH \gg 1$

$\leftarrow GH \ll 1$

(با کمتر شدن GH ، S_H^T کم می شود)



$H \rightarrow$

* جلسه دهم: سه‌شنبه: ۸۲/۱/۱۹

یادآوری:

$e = y_d - y \qquad \frac{e}{y_d} = \frac{1}{1+GH} \qquad S_G^T = \frac{1}{1+GH} \qquad S_H^T = \frac{-GH}{1+GH}$

$S_G^T - S_H^T = 1$

(a) تنظیم پاسخ حالت گذرا:

Find u s.t $y \to y_d$

$\lim_{t \to t_f} y = y_d \qquad t_f \neq \infty$

$u \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow y$

$y = Gu \qquad u = y_d$

$\Rightarrow y = G y_d$

⇐ به G بستگی دارد که چگونه y به y_d نزدیک شود

مثال:

$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + 2s + 4}$

در نهایت y به $\frac{1}{4}$ می‌رسد (گین dc سیستم $\frac{1}{4}$ است)

در سیستم Open loop، برای رسیدن به y_d (خروجی مطلوب)، G در اختیار ما نیست و نمی‌توانیم آن را تغییر دهیم.

یک روش Invers dynamic است:

$u = C(s) \cdot y_d \qquad y_d \longrightarrow \boxed{C(s)} \xrightarrow{u} \boxed{G} \longrightarrow y$

$C(s) = G^{-1}(s)$

* اشکالات این روش:

(۱) $G(s)$ دقیقاً شناخته شده نیست.

(۲) $G(s)$ تغییر می‌کند.

(۳) ممکن است معکوس سیستم G، ناپایدار باشد (G دارای صفر ناپایدار باشد)

(۴) ممکن است درجه صورت G از مخرج آن کمتر باشد (حداقل مساوی باشد) (G اکیداً سره باشد: Strictly Proper)

به غیر از تنها بعضی فرآیندهای شیمیایی، کنترل Open Loop کاربردی ندارد و بیشتر کنترل حلقه بسته صحبت می کرد.

* مثال: موتور dc با کنترل آرمیچر:

فرض: ما کوچک است:

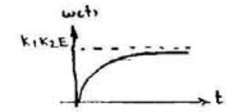
$$G(s)=\frac{\omega(s)}{V_a(s)}=\frac{K_1}{1+\tau_1 S}$$

$$K_1=\frac{K_m}{R_a f+K_b K_m} \quad , \quad \tau_1=\frac{R_a J}{R_a f+K_b K_m}$$

به فرض V_a ولتاژ پله است:

$$V_a=\frac{K_2 E}{S}$$

$$\Rightarrow \omega(t)=K_1 K_2 E(1-e^{-t/\tau_1})$$



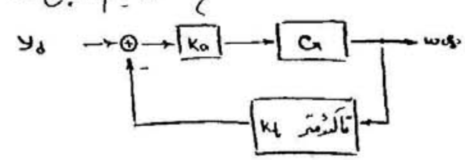
فرض می خواهیم این نمودار را تغییر دهیم: مثلاً تندتر به مقدار نهایی برسد:

تنها اهرم ما τ_1 است، $\tau_1=\frac{R_a J}{R_a f+K_b K_m}$. اما پارامتری را در اختیار نیست که تغییر دهیم. و تنها

J (ممان اینرسی بار) تغییرش تأثیر زیادی در τ می گذارد.

الان مشاهده می کنیم که سیستم حلقه بسته چگونه مشکل را حل می کند:

(۱) جهت تقویت کننده
(۲) تنظیم کننده پاسخ گذرا



کنترل فیدبک سرعت:

الان قصد داریم پاسخ زمانی این سیستم را ببینیم (برای ω) و ببینیم چه پارامترهایی در اختیار ماست تا کمک آنها پاسخ گذرا را تغییر دهیم:

$$\frac{\omega(s)}{y_d(s)}=\frac{K_a G}{1+K_a K_t G}=\frac{\frac{K_a K_1}{1+\tau_1 S}}{1+\frac{K_a K_t K_1}{1+\tau_1 S}}=\frac{K_a K_1}{1+\tau_1 S+K_a K_t K_1}=\frac{\left.\frac{K_a K_1}{1+K_a K_t K_1}\right\} K_2}{1+\frac{\tau_1 S}{1+K_a K_t K_1}}$$

$$\tau_c=\frac{\tau_1}{1+K_a K_t K_1}$$

Closed Loop

واضح است که $\tau_1>\tau_c$

و از طرفی اهرم K_a در اختیار ماست که می توانیم ثابت زمانی سیستم را تغییر دهیم.

به فرض: $y_d = \frac{K_2 E}{S}$ ← $\omega(t) = K_c \cdot K_2 \cdot E(1-e^{-t/\tau_c})$

تذکر: K_t بر روی مقدار τ_c اثر دارد. اما از آن استفاده نمی‌کنیم: چون:

$$\frac{\omega(s)}{y_d(s)} = \frac{\frac{K_a K_1}{1+K_a K_1 K_t}}{1+\frac{\tau_1 s}{1+K_a K_t K_1}}$$

← افزایش K_t، گین را کم می‌کند.

اما K_a (چون هم در مخرج است و هم در صورت) اثری بر گین ندارد.

تذکر: $P_c = -\frac{1+K_a K_t K_1}{\tau_1}$

تذکر: K_a را خیلی نمی‌توان زیاد کرد که τ_c کم شود چون:

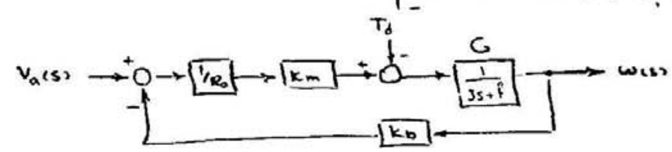
(۱) هزینه بالا می‌رود

(۲) افزایش K_a ⇐ افزایش V_a ← ممکن سیستم وارد ناحیه اشباع گردد

معمولاً با این روش، تا ۱۰۰ برابر حلقه باز، سیستم را بهبود می‌بخشیم.

(D) اثر سیگنالهای اغتشاش بر سیستم فیدبک:

در اینجا هم از همان موتور dc با فرض کوچک بودن L_a استفاده می‌کنیم:



می‌خواهیم اثر T_d را ببینیم: چون سیستم LTI است ← از جمع آثار کمک می‌گیریم:

$V_a(s)=0$ (فقط اثر T_d را ببینیم) به فرض $T_L(s) = \frac{D}{S}$ (ورودی پله‌ای)

$$\frac{\omega}{T_d} = \frac{-G}{1+\frac{K_m K_b}{R_a}\cdot G} = \frac{-\frac{1}{Js+f}}{1+\frac{K_b K_m}{R_a}\cdot\frac{1}{Js+f}} = \frac{-1}{Js+f+\frac{K_b K_m}{R_a}}$$

$$\rightarrow \omega(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{-D}{Js+f+\frac{K_bK_m}{R_a}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{-D\cdot R_a}{(Js+f)R_a+K_bK_m}$$

به کمک قضیه مقدار نهایی داریم :

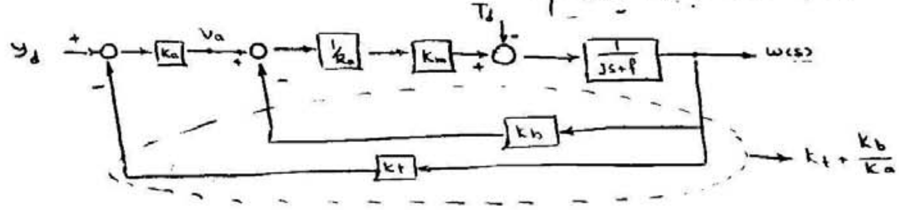
$$\omega_{ss} = \lim_{t\to\infty}\omega(t) = \lim_{s\to 0} s\,\omega(s) = \frac{-DR_a}{fR_a+K_bK_m}$$

هنگامیکه از قضیه مقدار نهایی استفاده می کنیم ، باید از پایداری سیستم مطمئن باشیم.

که در اینجا مطمئن بودیم ، چون تمام المان های سیستم فرکانسی اند ، و یک ریشه داریم آن هم چپ $j\omega$ است ← پایدار است

$$e_{ss} = V_a(s) - \omega(s) = \frac{DR_a}{fR_a+K_bK_m}$$

الان حالت فوق را با حالت حلقه بسته مقایسه می کنیم :



ساده سازی : $\rightarrow k_t + \frac{K_b}{K_a}$

$$V_a = 0 \quad T_L = \frac{D}{s} \quad \rightarrow \frac{\omega}{T_d} = \frac{-\frac{1}{Js+f}}{1+\frac{K_aK_m}{R_a}\left(k_t+\frac{K_b}{K_a}\right)\cdot\frac{1}{Js+f}} = \frac{-1}{Js+f+K_ak_t\frac{K_m}{R_a}+\frac{K_mK_b}{R_a}} = \frac{-1}{Js+f+\frac{K_m}{R_a}(K_ak_t+K_b)}$$

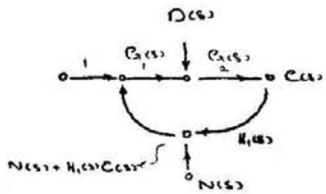
$$\omega(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{-DR_a}{(Js+f)R_a+K_m(K_ak_t+K_b)}$$

$$\omega_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,\omega(s) = \frac{-DR_a}{fR_a+K_m(K_ak_t+K_b)}$$

- با افزایش K_a این کسر کوچک می شود ، اثر سیگنال اغتشاش کم می شود

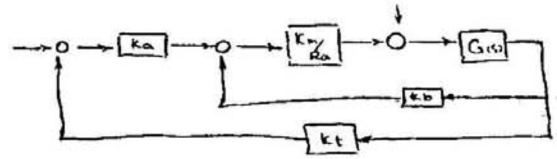
تذکر : افزایش گین حلقه فیدبک ، تمام مشخصات سیستم را بهبود می بخشد به جز Sencitivity .

* جلسه دهم : یکشنبه : ۸۲،۱،۲۴



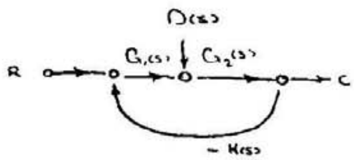
نویز : مشخصه ذاتی سنسور (sensor)

موتور dc :



(I)

سیستم استاندارد تک حلقه ای :



$$(I) \rightarrow \begin{cases} G_2(s) = G(s) \\ G_1(s) = \dfrac{K_a K_m}{R_a} \\ H(s) = k_t + \dfrac{K_b}{K_a} \end{cases}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{-G_1G_2H_2}{1+G_1G_2H_1H_2}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{1}{H_1} \quad \leftarrow \quad G_1G_2H_1H_2 \gg 1$$

برای کاهش نویز ، H_1 باید بزرگ باشد.

نسبت سیگنال به نویز سنسور

$$\begin{cases} S_H^T \qquad H \gg 1 \\ \text{نویز} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_G^T \\ D(s) \qquad \frac{1}{2} \qquad ? \rightarrow \end{cases}$$

$$S_{G_2}^T = \frac{\partial T}{\partial G_2} \cdot \frac{G_2}{T} \Rightarrow S_{G_2}^T = \frac{G_1(1+G_1G_2H) - G_1HG_2}{(1+G_1G_2H)^2}$$

$$T = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H} \qquad\qquad S_{G_2}^T = \frac{1}{1+G_1G_2H}$$

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2}{1+G_1G_2H} \qquad G_1G_2H \gg 1 \Rightarrow \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{G_1H}$$

$$\begin{cases} \dfrac{C(s)}{D(s)} \approx \dfrac{1}{G_1H} \\ S^T_{G_2} \approx \dfrac{1}{G_1G_2H} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{C(s)}{N(s)} \approx \dfrac{-1}{H_1} \\ S^T_H \approx -\dfrac{1}{H} \end{cases} \Leftarrow$$

G_2 گین حلقه را افزایش می‌دهد ولی اغتشاش را نیز زیاد می‌کند. بنابراین G_1 را انتخاب می‌کنیم برای افزایش گین حلقه.

در مسیر feed forward هر تابع تبدیلی که دیده نمی‌شود (در صورت نمی‌آید) را افزایش می‌دهیم. (برای کاهش حساسیت)

خطای حالت دائم:

برای سیستم نوسانی، transient هیچگاه از بین نمی‌رود، خطای حالت دائم ندارد.

سیستم باید به حالت پایدار برسد که خطای حالت دائم را بتوان برای آن تعریف کرد.

خطای تعقیب:

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

با فرض پایداری سیگنال $e(t)$:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

a) سیستم حلقه باز:

$$C(s) = G(s)\cdot R(s) \qquad R(s) \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow C(s)$$

$$\longrightarrow E(s) = (1-G(s))R(s)$$

با فرض $R(s) = \frac{1}{s}$ ←

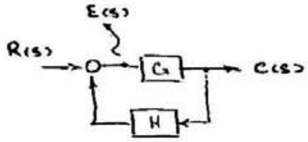
$$E(s) = (1-G(s))\cdot\frac{1}{s}$$

با فرض پایداری G:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = 1 - \underbrace{G(0)}_{\text{گین dc}}$$

← خطای حالت دائم وابسته به DC gain سیستم است.

(b) سیستم حلقه بسته:



$$E(s) = R(s) - C(s) \qquad C(s) = T(s)\cdot R(s)$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,(1 - T(s))\cdot\frac{1}{s} = 1 - T(0)$$

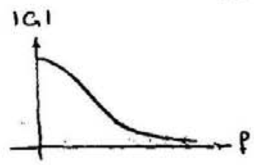
گین dc سیستم حلقه بسته ↲

$$E(s) = \frac{1}{1+G}\cdot R(s) \qquad H(s) = 1 \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1+G(0)}$$

(با فرض پایداری سیستم حلقه بسته: $T = \frac{1}{1+G}$)

سیستمهای فیزیکی غالباً پایین گذر هستند، بنابراین حالت حلقه بسته مجاز است.



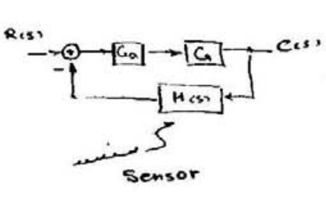
$$\begin{cases} e_c = 0 & \Rightarrow G(0) \to \infty \\ e_o = 0 & \Rightarrow G(0) = 1 \end{cases}$$

• مثال:

$$\begin{cases} G(s) = \dfrac{K}{1+\tau s} \\ H(s) = \dfrac{1}{1+\tau s} \end{cases} \qquad e_{ss} = ?$$

• هزینه‌ی فیدبک:

هزینه‌های مادی:
- افزایش پیچیدگی (Instrumentation)
- افزایش قیمت



هزینه‌های معنوی:
- کاهش بهره (Gain): قابل قبول
- امکان ناپایداری: قابل قبول نیست: باید از این بپرهیزیم

آنچه که برای ما مهم است، ریشه‌های $1+G$ است. ممکن است G پایدار باشد ولی $1+G$ خیر.

* مثال:

$$G(s) = \frac{s-1}{s+0.5}$$

$$k = 1$$

$$T = \frac{\frac{s-1}{s+0.5}}{1 + k \cdot \frac{s-1}{s+0.5}} = \frac{s-1}{s+0.5+s-1}$$

$$\rightarrow \quad T(s) = \frac{s-1}{2s-0.5}$$

بدیهی است که ناپایدار است. درحالیکه G پایدار بود.

در این مثال اگر به صورت حلقه باز کنترل می‌کردیم، پایدار می‌شد.

* اندازه‌های عملکرد سیستم فیدبک:

Performance
- Index
- Messure
- Criteria

هر سیستمی دو دسته پاسخ دارد: { پاسخ فرکانسی ، پاسخ زمانی }

پاسخ زمانی نسبت به ورودیهای استاندارد

ورودیهای استاندارد:
- ساده باشند
- تمام سیگنالها را برحسب این ورودیها بنویسیم

ورودیهای استاندارد خانواده پله و چند جمله‌ای:

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

$$u(t) \rightarrow 1/s$$

$$r(t) \rightarrow 1/s^2$$

$$p(t) \rightarrow 1/s^3$$

پاسخ ضربه یک سیستم (تابع تبدیل $G(s)$) برابر $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ می باشد.

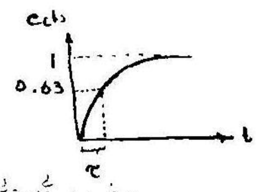
معیارهای عملکرد بر مبنای پاسخ پله ساخته می شوند.

ساخت پله آسانتر از ضربه است. سیگنال خروجی سیستم در پله، bounded است. ولی در $r(t)$ و $c(t)$ اینطور نیست.

پاسخ زمانی سیستم درجه ۱:

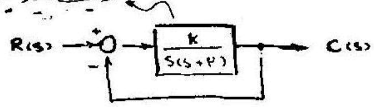
پاسخ ایده آل سیستمها، پاسخ فرومیرای درجه ۲ است.

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \quad \longrightarrow \quad c(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$



مدل بسیاری سیستمهای صلب مکانیکی

عملکرد سیستم درجه ۲:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{S^2 + PS + K} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2}$$

Standard form

پاسخ ضربه:

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\beta} . e^{-\xi\omega_n t} . \sin(\omega_n \beta t) \qquad \beta = \sqrt{1-\xi^2} \qquad 0 < \xi < 1$$

فرامیرا: دو قطب ساده $\quad \xi > 1$

میرای بحرانی: قطب ساده مکرر $\quad \xi = 1$

* جلسهٔ یازدهم: سه‌شنبه: ۸۲/۱/۲۶

معیارهای عملکرد:

برمبنای مشخصات تعریف شده ← اندازه‌های عملکرد (کمّی) ← ارتباط معیارهای عملکرد با پارامترهای سیستم ←

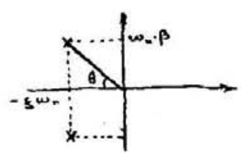
$\underbrace{\text{تنظیم پارامترهای خاص برای دستیابی به مشخصات مطلوب.}}_{\text{طراحی}}$

- اندازه‌های عملکرد برمبنای پاسخ ضربه سیستم تعیین می‌شود.
- امکان برقراری ارتباط معیارهای عملکرد با پارامترهای سیستم، در سیستمهای بالای درجه ۲ بطور تحلیلی امکان پذیر نیست.
- اکثر سیستمها را با تقریب می‌توان به درجهٔ ۲ مدل کرد.

* سیستم درجهٔ دو استاندارد:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

پاسخ ضربه:



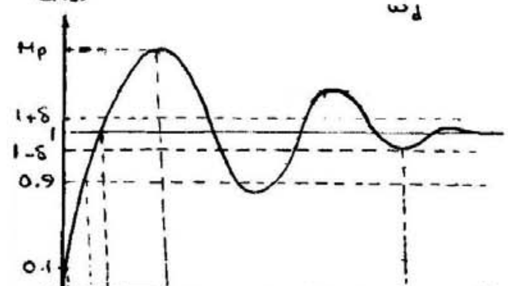
$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\begin{cases} \beta = \sqrt{1-\xi^2} \\ \theta = \cos^{-1}\xi \end{cases}$$

پاسخ ضربه: $g(t) = \frac{\omega_n}{\beta} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t)$

پاسخ پله: $c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta)$

در ω_n ثابت، با افزایش ξ شیب میرایی بیشتر می‌شود. و از طرفی $\underbrace{\beta\omega_n}_{\omega_d}$ کم می‌شود ← با سرعت کمتری میرا می‌شود.



تعریف اندازه‌های عملکرد:

T_r ، زمان اوج (Rise time) : زمان رسیدن پاسخ به ٪100 مقدار نهایی

T_{r_1} : زمان رسیدن پاسخ از 0.1 تا 0.9 پاسخ نهایی

T_p : زمان قله (Peak time) : زمان رسیدن پاسخ به ماکزیمم خودش

M_p : ماکزیمم مقدار پاسخ

T_s : زمان نشست ، زمان قرار : (Setting time) : زمانی است که سیستم به پاسخ محدود δ از مقدار نهایی می‌رسد و در آن استقرار می‌یابد.

P.O (Percent Overshoot) : درصد بالازدگی یا انحراف نرمالیزه شده پاسخ از مقدار نهایی :

$$P.O = \frac{M_p - C_{ss}}{C_{ss}} \times 100$$

C_{ss} : خروجی در حالت ماندگار (دائم)

معیارهای سرعت : T_s ، T_p ، T_r

معیارهای دقت : P.O ، T_s ، M_p

معیارهای عملکرد برحسب پارامترهای سیستم درجه ۲ : (ξ , ω_n)

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\beta} \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \beta t)$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi_n \omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \beta t + \theta) \qquad \theta = \cos^{-1}\xi \qquad \beta = \sqrt{1-\xi^2}$$

- یافتن زمان رسیدن به ماکزیمم مقدار (T_p) :

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=T_p} = 0 \rightarrow g(T_p) = 0$$

$$g(t) = 0 \rightarrow \sin(\omega_n \beta t) = 0 \rightarrow \omega_n \beta T_p = \pi \rightarrow \quad T_p = \frac{\pi}{\omega_n \beta}$$

- ماکزیمم مقدار پاسخ (M_p) :

$$M_p = C(T_p) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi \omega_n T_p} \sin(\omega_n \beta T_p + \theta) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi \frac{\pi}{\beta}} \sin(\pi + \theta)$$

$$= 1 + \frac{1}{\beta} e^{-\xi\pi/\beta} \cdot \sin\theta \quad \rightarrow \quad M_p = 1 + e^{-\xi\pi/\beta}$$

- P.O:

$C_{ss}=1 \to$

$P.O=\frac{M_p-1}{1}\times 100 \to \qquad P.O=100 \cdot e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$

overshoot تنها به ξ وابسته است.

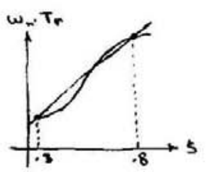
$$\left.\begin{array}{l} T_p \downarrow \leftarrow \xi \downarrow \quad \omega_n = cte \\ T_p \downarrow \leftarrow \omega_n \uparrow ,\ \xi = cte \end{array}\right\}$$

- T_r (زمان رسیدن به ٪100 مقدار نهایی):

$c(t)=1-\frac{1}{\beta}e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n\beta t+\theta) \to c(T_r)=C_{ss}=1 \to \sin(\omega_n\beta T_r+\theta)=0 \to$

$\omega_n\beta T_r+\theta=\pi \to \qquad T_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_n \cdot \beta}$

هر چه ξ بیشتر باشد، سرعت سیستم بیشتر است.



- T_{r1}: به کمک حل عددی یافته می‌شود:

$\to \quad T_{r1} \approx \frac{2.16\xi+0.6}{\omega_n}$

$0.3<\xi<0.8$

- T_s: زمان نشست:

فرمول تقریبی: در این روش زمانی را می‌نامیم که پاسخ سیستم وارد محدوده δ می‌شود:

(درپوش همان ترم نمایی است)

$\delta=2\%$

$\delta=5\%$

برای نتایج‌ها: $\tau \to 0.63$

$3\tau \to 0.95$

$4\tau \to 0.98$

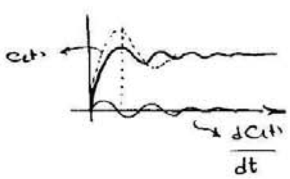
$$T_s \begin{cases} \delta=2\% \to 4\tau=\frac{4}{\xi\omega_n} \\ \delta=5\% \to 3\tau=\frac{3}{\xi\omega_n} \end{cases}$$

اثرات صفر و قطب سوم:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(1+T_z\cdot s)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \rightarrow G(s) = \underbrace{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}_{c_1(t)} + T_z\cdot\frac{\omega_n^2 s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$c(t) = c_1(t) + \left(\frac{dc_1(t)}{dt}\times T_z\right)$$



T_s و T_p کم می‌شود.

P.O : افزایش می‌یابد

با افزایش ثابت زمانی صفر (T_z)، این اثرات محسوس‌تر اند.

T_z تأثیری بر C_{ss} ندارد ← با افزایش T_z سیستم ناپایدار نمی‌شود.

اثر صفر سمت راست:

$$c(t) = c_1(t) + \overset{\text{منفی}}{T_z}\cdot\frac{dc_1(t)}{dt} \qquad T_z<0$$

T_r و T_p افزایش می‌یابد، P.O کم می‌شود.

پاسخ دارای undershoot می‌شود.

سیستمی که صفر راست دارد، پس از لحظه شروع undershoot دارد (ابتدا در جهت عکس حرکت می‌کند).

هر قدر صفر سمت راست به صفر نزدیک‌تر شود، اثرات مخرب آن بیشتر می‌شود.

اگر T_z خیلی کوچک باشد یا سمت راست خیلی دور از صفر باشد، اثرات آن کم است و از اصطلاح Weak non-minimum phase می‌نامیم.

* جلسه دوازدهم : پنجشنبه : ۸۲/۱/۲۸

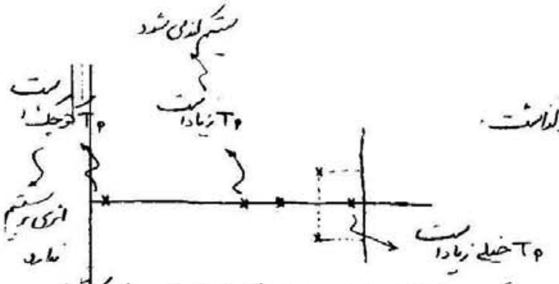
اثر قطب سوم :

اثر صفر: صفر مانند یک مشتق گیر عمل می کند. صفر سرعت سیستم و overshoot را افزایش می دهد.

و اما اثر قطب :

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(1+T_p s)}=\frac{As+B}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}+\underbrace{\frac{K}{s+\frac{1}{T_p}}}_{\to\ e^{-t/T_p}}$$

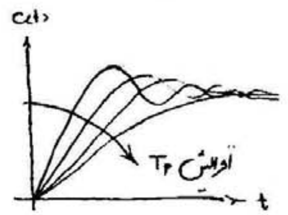
اگر T_p خیلی کوچک باشد ← اثری بر پاسخ زمانی نخواهد داشت.



که در اینجا قطب غالب است و گویی سیستم درجه 1 است

اگر قطب سوم، T_p کوچک نداشته باشد ← سیستم را کندی کند. زمان اوج و زمان نشست زیاد می شود و P.O کم می شود.

در حالت قطب غالب، چون سیستم درجه 1 است ← Overshoot ندارد.



پاسخ عملکردی در حذف قطب سوم باید منظور شود.

* در دو حالت میتوان از اثر یک قطب صرفنظر کرد (یعنی اثر قطب در پاسخ زمانی محسوس نباشد) :

(۱) قطب از محور ها خیلی دور باشد.

بیان ریاضی :

$$G(s)=\frac{m(s)}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\times\cdots(s+\alpha_n)}\quad\to g(t)=k_1e^{-\alpha_1 t}+\cdots+k_ne^{-\alpha_n t}$$

$\alpha_i >> 1$

(۲) صفری در نزدیکی یک قطب وجود داشته باشد:

$$G(s)=\frac{(s+z_1)\cdots}{(s+\alpha_1)\cdots}$$

اثر قطب کاملاً حذف می شود $z_1=\alpha_1 \Rightarrow$

اثر قطب کم میشود. $z_1\approx\alpha_1 \Rightarrow$
(با کم شدن ضریب آن در پاسخ زمانی)

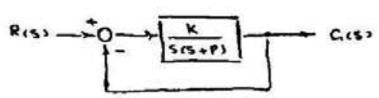
تذکر:

$$g(t)=k_1 e^{-\alpha_1 t}+\dots+k_n e^{-\alpha_n t}$$

k_i ها توسط صفرها و α_i ها توسط قطبها تعیین می شود.

تا کنون معیارهای عملکرد بیان شدند. اکنون به کمک مثال زیر کاربرد آنها را بیان می کنیم:

* مثال:



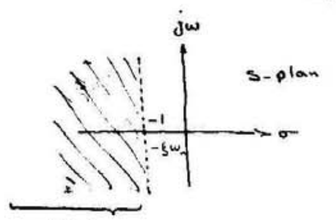
$$T(s)=\frac{K}{s^2+Ps+K}$$

پارامترهای P و K را طوری تعیین کنید که پاسخ گذرا دارای $P.O<0/05$ و زمان نشست کمتر از $4\ s$ داشته باشد.

$$T(s)=\frac{K}{s^2+Ps+K}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \rightarrow \begin{cases} K=\omega_n^2 \\ P=2\xi\omega_n \end{cases}$$

$$T_s=\frac{4}{\xi\omega_n}<4(s) \Rightarrow \xi\omega_n>1$$

سیستم درجه ۲ داریم: $s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

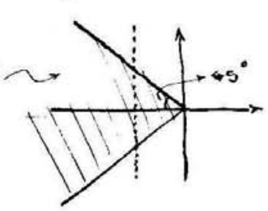


در این ناحیه شرط $T_s<4$ ارضا می شود

$$P.O=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\xi=0.707 \rightarrow P.O=4.3\ \%$

اکنون باید ناحیه ای از صفحه s را بیابیم که این شرط را نیز ارضا کند:



ارضای شرط $P.O<0/05$

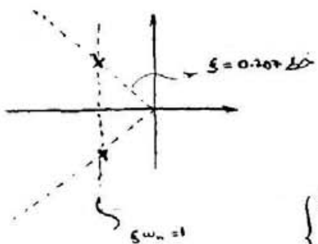
$$\theta=\cos^{-1}\xi=\cos^{-1}(0.707)=45^\circ$$

و ناحیه مشترک پاسخ است

* راه حل دیگر این بود که ابتدا یک مقدار کمتر از ٪۹ برای PO و مقدار کمتر از (s) ۴ برای T_s فرض کنیم، معادلات را حل کنیم و پارامترهای مطلوب یافته شود.

الان بحث می‌کنیم کجای این ناحیه مطلوب، بهتر است؟

انتخابهای خوب روی مرز هستند.



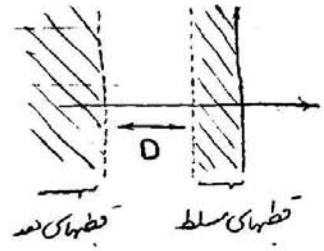
$$\begin{cases} \zeta\omega_n = 1 \\ \zeta = 0.707 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \omega_n = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K = 2 \\ P = 2 \end{cases}$$

نتیجه: K در اختیار ماست (در ان گین است)
ولی فعلا P در اختیار ما نیست.

* مفهوم قطب مسلط:

یک سری قطبها هستند که روی پاسخ زمانی تاثیر دارند: قطبهای نزدیک محور $j\omega$

یک سری قطبها تاثیر چندانی بر پاسخ زمانی ندارند: قطبهای دور از محور $j\omega$



. معیار دقیقی برای D نمی‌توان ارائه کرد.

- جزء حقیقی قطبها ضریب میرا شدن را تعیین می‌کند
- جزء موهومی قطبها، فرکانس میرا شدن را.

• بطور تجربی می‌توان گفت: قطبهایی که ۵ تا ۱۰ برابر از بقیه قطبها به محور موهومی نزدیک‌تر باشند، قطب غیرمسلط هستند.

• حفظ گین dc در حذف قطبهای غیرمسلط:

... اکنون به این موضوع می‌پردازیم که چگونه می‌توان قطب غیرمسلط را حذف کرد:

• مثال:

$$G(s)=\frac{10}{(s+10)(s^2+2s+2)} \qquad s_{1,2}=-1\pm j \qquad s_3=-10$$

چون $real(s_3) \ll real(s_{1,2})$ یعنی: $-10 \ll -1$ ⇐ s_3 قطب دور است

⇐ $s_{1,2}$ قطبهای مسلط است

⇐ آیا می‌توان نوشت: $G_1(s)=\frac{10}{(s^2+2s+2)}$ ؟ پاسخ: خیر

چون گین dc برای G و G_1 یکی نیست.

$$G(s)=\frac{10}{10(s^2+2s+2)(1+\frac{s}{10})} \longrightarrow \frac{s}{10}\ll 1 \Rightarrow G(s)=\frac{10}{10(s^2+2s+2)}$$

این فرم درست است: چون $dc_{gain}=G(0)=0.5$ تغییر نکرده است.

• تخمین پارامترهای سیستم درجه ۲:

توضیح: در این بخش می‌توان سیستم که پارامترهای سیستم درجه ۲ را با هم آورد با اعمال ورودی، به سیستم درجه ۲، خروجی را داشته باشیم.

- پارامترهای سیستم درجه ۲ استاندارد: ξ و ω_n

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

- پارامترهای سیستم درجه ۲ به فرم کلی: ξ و ω_n و K

$$G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

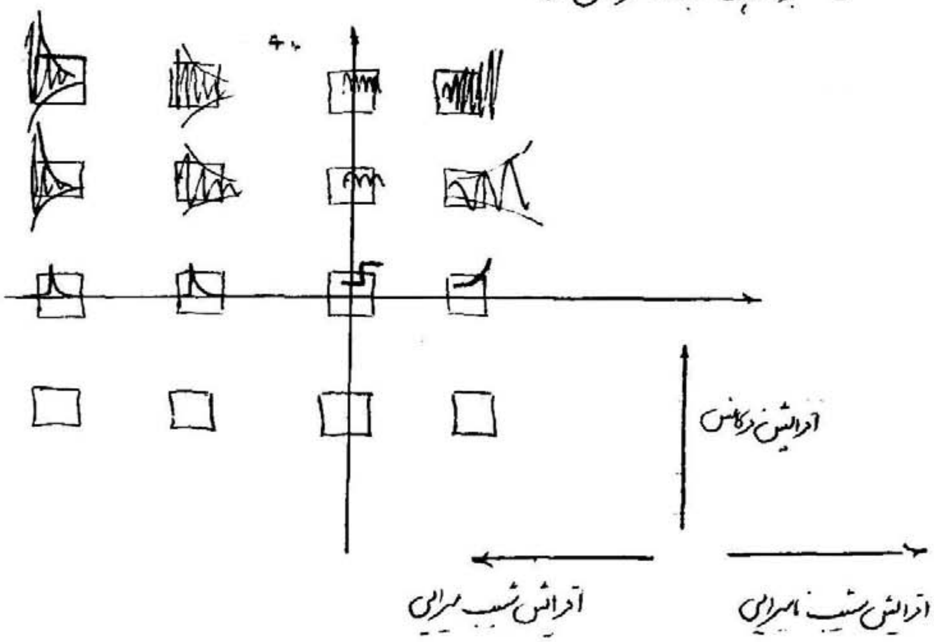
در آن همیشه $dc_{gain}=1$ می‌باشد.

از روی P.O نمودار: ξ بدست می‌آید و از روی T_s و T_r، ω_n بدست می‌آید.

K هم که همان مقدار ماندگار سیستم است.

* محل قطبها و پاسخ حالت گذرا :

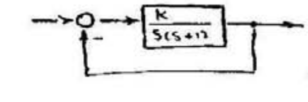
- جزء حقیقی قطب : شیب میرایی
- جزء موهومی قطب : فرکانس نوسان



. فیدبک سرعت:

عموماً قطب در حلقه باز در اختیار ما نیست و نمی‌توانیم آن را تنظیم کنیم

مثال: K را طوری بیابید که $\begin{cases} P.O \leqslant . \\ T_s \leqslant . \end{cases}$



$$T(s) = \frac{K}{S^2+S+K}$$

آیا برای این تابع می‌توان T_s تعیین کرد؟ پاسخ: خیر: چون $\xi\omega_n$ ثابت است و در دست ما نیست.

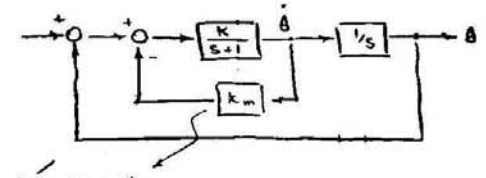
$$\frac{K}{S^2+S+K} = \frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2} \longrightarrow \xi\omega_n = 0.5$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 8$$

از طرفی ξ هم در اختیار ما نیست چون با تغییر K، ω_n تغییر می‌کند و چون $\xi\omega_n$ ثابت است ← ξ هم تغییر می‌کند.

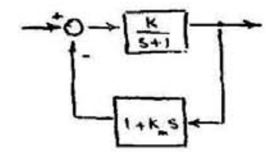
← تنها یکی از پارامترهای سیستم را می‌توانیم کنترل کنیم.

راه حل: فیدبک سرعت:



مانند دمپر عمل می‌کند
(فصل ۴)

پس از ساده سازی داریم:



$$\longrightarrow T(s) = \frac{\frac{K}{S(S+1)}}{1+\frac{K(1+K_m S)}{S(S+1)}}$$

$$\longrightarrow T(s) = \frac{K}{S^2+(1+KK_h)S+K} = \frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2} \longrightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = K \\ 2\xi\omega_n = 1+KK_h \end{cases}$$

← کمک K_h می‌توان ξ را (میرایی) تغییر داد و تأثیری روی ω_n ندارد.

بدیهی است: چون یک دمپر در فرکانس طبیعی کل سیستم را تغییر نمی‌دهد.

$K \downarrow \longrightarrow$ ω_n تنظیم میشود

$K_h \downarrow \longrightarrow$ ξ تنظیم میشود.

• مثال: پارامترهای k و k_h را برای رسیدن به $P.O < 20\%$ و $T_p < 1(s)$ تنظیم کنید:

$$P.O = 100 \cdot e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad , \quad P.O = 20 \Rightarrow \xi = 0.456 \rightarrow P.O < 20\% \rightarrow \xi > 0.456$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow \omega_n = 3.53 \rightarrow \omega_n > 3.53 \quad \Big\} \rightarrow \begin{cases} P.O < 20\% \\ T_p < 1 \end{cases}$$

الان به راحتی ξ و ω_n را به k و k_h تبدیل می‌کنیم:

$$K = \omega_n^2 = 12.5$$

$$1 + KK_h = 2 \times 3.53 \times 0.456 \rightarrow K_h = 0.178$$

• خطای حالت دائمی:

خطای حالت دائم یکی از مهمترین اندازه‌های عملکرد است.

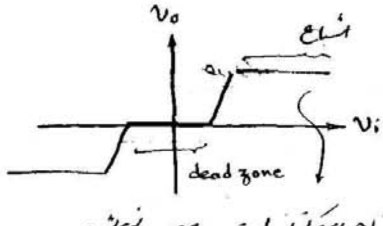
برای هر سیستم یک حد قابل قبول برای خطای حالت دائم وجود دارد.

کتاب اهمیت که چگونه میتوانیم خطای حالت دائم را کوچک کنیم؟

* خطای حالت دائم دو منبع (Source) دارد

(۱) المانهای غیرخطی

(۲) عدم توانایی دینامیک سیستم برای تعقیب ورودیهای خاص



اشباع: ناحیه‌ای که تغییرات ورودی دیده نمی‌شود.

• المانهای غیرخطی: - اشباع (مثلاً)

- dead zone

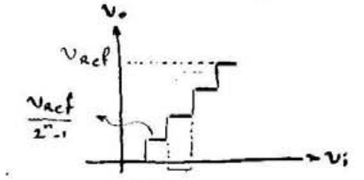
- خطای کوانتیزاسیون

- اصطکاک کولمب

خطای سطح‌بندی : Quantization Error

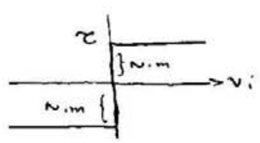
خطای دیجیتیزاسیون: - ساده‌سازی کامپیوتری

- تبدیل A2D یا ADC — در حالت n بیت می‌توان $2^n - 1$ سطح را نشان داد.



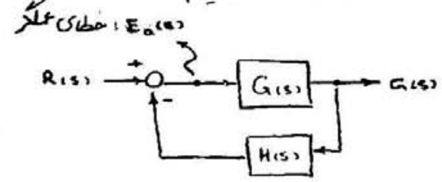
در این محدوده تغییرات حسی دیده نمی‌شود

اصطکاک کولمب :



- یعنی باید τ به حدی باشد که بر اصطکاک غلبه کند.

بحث اصلی ما قسمت دوم است (عدم توانایی تعقیب دقیق) که اکنون به آن می‌پردازیم:



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$E_a(s) = R(s) - H(s) \cdot C(s)$$

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - T(s)R(s) \\ T(s) = \dfrac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(s) = R(s) - \frac{G}{1+GH} \cdot R(s) = R(s)\left(1 - \frac{G}{1+GH}\right) \Rightarrow E(s) = \frac{1+GH-G}{1+GH} \cdot R(s)$$

در سیستم فیدبک واحد داریم:

$$H = 1 \Rightarrow E(s) = E_a(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s)$$

در تمامی مباحث این بخش فرض پایداری $T(s)$ لحاظ شده است. چون می‌خواهیم از قضیه مقدار نهایی کمک بگیریم:

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

به فرض : $\leftarrow R(s)=\frac{1}{s}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{1+G(0)}$$

الان پارامتری به نام نوع سیستم را معرفی می‌کنیم :

* نوع سیستم :

سیستمی با تابع تبدیل مقابل را در نظر بگیرید :

$$G(s)=K\cdot\frac{(1+Z_1 S)\cdots(1+Z_m S)}{S^N(1+P_1 S)\cdots(1+P_n S)}$$

این سیستم : m عدد صفر دارد. $N+n$ عدد قطب دارد.

- مرتبه سیستم : بزرگترین درجه مخرج

* نوع سیستم : تعداد انتگرال‌گیرهای سیستم ؛ تعداد قطبهای سیستم در مبداء $(s=0)$

$$G(0)=\lim_{s\to 0} G(s)=\begin{cases}K & \leftarrow N=0\\ \infty & \leftarrow N\geq 1\end{cases}$$

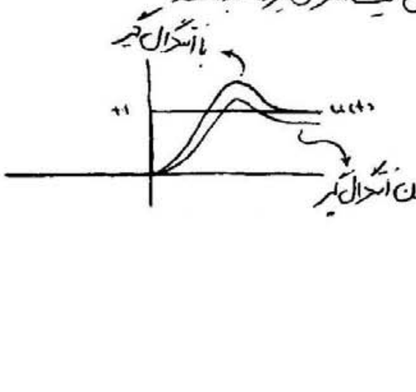
- نتیجه : تنها حالتیکه خطای ماندگار سیستم ($e_{ss}=\frac{1}{1+G(0)}$) صفر باشد، آنست که $G(0)$ بینهایت باشد
یعنی $N\geq 1$ باشد ؛ به عبارت دیگر سیستم باید حداقل یک انتگرال‌گیر داشته باشد.

ثابت خطای موقعیت :

$$K_p=\lim_{s\to 0} G(s)$$

$$K_p=\begin{cases}K & : N=0\to e_{ss}=\frac{1}{1+K}\\ \infty & : N\geq 1\to e_{ss}=0\end{cases}$$

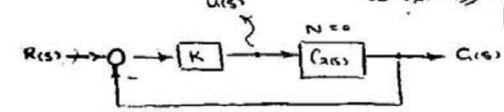
شرط اینکه سیستم بتواند ورودی پله را تعقیب کند، آنست که حداقل یک انتگرال‌گیر داشته باشد.



آیا با تغییر K می‌توان خطا را صفر کرد؟ پاسخ: خیر - چون K را نمی‌توان تا بی‌نهایت برد.

به عبارت واضح‌تر:

چرا سیستم زیر نمی‌تواند خطای حالت دائم صفر داشته باشد؟



چون K محدود نمی‌تواند خروجی نامحدود ایجاد کند.

تذکر: اگر K را با یک انتگرال‌گیر تعویض کنیم، می‌تواند خطای ماندگار سیستم صفر شود. چون انتگرال‌گیر سطح زیر منحنی خطا را می‌خواهد نه خود خطای لحظه‌ای را.

در حقیقت، انتگرال‌گیر، سطح زیر منحنی خطا را به سیستم اعمال می‌کند؛ بیان ریاضی:

$$\left.\begin{array}{l} e=0 \Rightarrow U(s)=Ke=0 \Rightarrow C(s)=0 \Rightarrow C(s)\neq R(s) \\ e=0 \Rightarrow C(s)=R(s) \end{array}\right\}$$ تناقض

$$e=\frac{1}{1+K}\cdot r \Rightarrow u=\frac{K}{1+K}\cdot r \Rightarrow e=(r)\left(1-\frac{K}{1+K}\right)=\frac{r}{1+K}=e$$ تناقض دارد.

⟵ با K محدود، اگر خطا صفر باشد ⟵ به تناقض می‌رسیم ⟵ با افزایش K نمی‌توانیم خطای حالت دائم را صفر کنیم.

تذکر: اگر انتگرال‌گیر داشته باشیم، می‌توانیم $e=0$ داشته باشیم، درحالیکه $U(s)$ غیرصفر است.

چون انتگرال‌گیر سطح زیر منحنی خطا را اندازه می‌گیرد.