$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

حفظ شوند

شرط تعامد P_n ها

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0 \qquad m\neq n$$

$$\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$$

اگر تابع f در شرایط قضیه دیریکله صدق کند (نقاط انفصال محدود باشد و در نقاط انفصال حد چپ و راست موجود باشد (تابع پیوسته قطعه ای است) «تابع و مشتق آن به طور قطعه ای پیوسته باشد» در این صورت در نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$f(x)=\sum_{0} C_n P_n(x)$$

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx$$

و در نقطه ناپیوستگی میانگین حد چپ و راست می شود

Subject:

Year. Month. Date. ( )

1- $\int_{-1}^{1} (\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma) \, P_{2n-1}(x) = 0$

زوج   فرد

2- $P_0(x)=1$ ، $P_1=x$ و $-1<x<1$ و $P_2(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

مقادیر α و β و γ چگونه باشند که P_0 و P_1 و P_2 یک مجموعه متعامد باشند

β نباید باشد ⇐ $\beta=0$ $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$ $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_2(x)$ $\int_{-1}^{1} P_1(x)\, P_2(x)$

سه معادله سه مجهول

3- $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2)\, P_{2n+1}(x)\, dx = 0$

$=$

4- P_2 ، y_1 جواب $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ لژاندر با اندیس 2 $n=2$

P_1 $= y_2$ جواب $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ لژاندر با اندیس 1

$\int_{-1}^{1} x y_1 y_2 \, dx = 0$

$\int_{-1}^{1} y_1 y_2 \, dx = 0$ ✓

$\int_{-1}^{1} y_1 y_2 \, dx = \frac{2}{5}$

$\int_{-1}^{1} y_1 y_2 \, dx = \frac{2}{3}$

$$\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx = 0$$ -5

$$\int_{-1}^{1} (x+1) P_0 \,dx = \qquad P_0 = 1$$ -6

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

P_1 و P_2 و P_3 سه تا چند جمله ای

اگر $P_1(a)=0$ آنگاه a یک نقطه منفرد است.

$\cancel{P_1(x)}$ $P_1(a)=0 \Rightarrow P_1(x) = (x-a)(Q(x))$

$$\Rightarrow y'' + \frac{g(x)}{(x-a)} y' + \frac{h(x)}{(x-a)^2} y = 0$$

$g(x) = \frac{\text{چند جمله ای}}{\text{چند جمله ای}}$ گویا = اگر مخرج صفر شود تحلیلی نیست

اگر $g(x)$ و $h(x)$ در $x=a$ تحلیلی باشند آنگاه a را منفرد منظم گویند و اگر لااقل یکی تحلیلی نباشد منفرد نامنظم است.

1- درمعادله زیر نوع نقاط تکین (منفرد) را تعیین کنید

$$x^2(x-1)^3 y'' + x(x-1)y' + y = 0$$

نقاط منفرد

$x=0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ تحلیلی

$h(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ تحلیلی $\Rightarrow$ $x=0$ منفرد منظم

$x=1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ در $x=1$ تحلیلی نیست $\Rightarrow$ $x=1$ منفرد نامنظم

در حالت منفرد نامنظم مسأله حل نمی‌شود

2

$x^2(1-x)y'' + y' - y = 0$ نقاط تکین 0 و 1

$x=0$ $g(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ تحلیلی نیست $\Rightarrow x=0$ نقطه تکین نامنظم

$x=1$ $g(x) = \frac{1}{x^2}$ تحلیلی $\Rightarrow h(x) = -\frac{x-1}{x^2}$

$x=1$ منفرد منظم

فرض شود $x=0$ یک نقطه منفرد منظم باشد

$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$

$$y'' + \frac{g(x)}{x}y' + \frac{h(x)}{x^2}y = 0$$

$g(x)$ و $h(x)$ هر دو در $x=0$ تحلیلی باشند،

اگر $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله باشد آنگاه معادله لااقل دارای یک جواب به صورت سری توسعه یافته سری توانی است

$y = x^r \sum a_n x^n , a_0 \neq 0$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

معادله شاخصی $\Rightarrow r^2 + r\,(g(0) - 1) + h(0) = 0$ ضریب کمترین توان‌ها در اصغری کدام

1- ریشه‌های معادله شاخصی معادله زیر کدام است

$$3x(3x+2)y'' - 4y' + 4y = 0$$

ابتدا معادله g و h را تعیین می‌کنیم

$$g(x) = \frac{-4}{3(3x+2)} \quad , \quad h(x) = \frac{4x}{3(3x+2)}$$

$$r^2 + r\left(-\frac{2}{3} - 1\right) + 0 = 0 \qquad r_1 = 0 \qquad r_2 = \frac{5}{3}$$

2- ریشه‌های معادله شاخصی کدام است

$$x^2 y'' - 3xy' + (x+4)y = 0$$

$$g(x) = -3 \quad , \quad h(x) = x + 4 \qquad \Rightarrow r^2 + r(-3 - 1) + 4 = 0$$

$$r = 2 , 2$$

3- ریشه‌های معادله شاخصی کدام است

$$xy'' + y' + y = 0 \qquad g(x) = 1 \quad , \quad h(x) = x$$

$$r^2 + r(1 - 1) + 0 = 0 \qquad r_1 = r_2 = 0$$

PAPCO

حالت های بررسی

1. معادله شاخصی دارای دو ریشه متمایز $r_1 \neq r_2$ و تفاضل ریشه ها عدد صحیح نباشد

$y_1 = x^{r_1} \sum \cdots$

$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = x^{r_1 - r_2}(\cdots$$

$y_2 = x^{r_2} \sum \cdots$

$$y_1 = x^{r_1} \sum_0 a_n x^n \quad \text{و} \quad y_2 = x^{r_2} \sum_0 b_n x^n$$

2. $\Delta = 0$ و یک r بدست آید: r را در جای خودش میگذاریم

$$y_1 = x^r \sum_0 a_n x^n$$

$$y_2 = u y_1$$ خارج قسمت تابعی از x

$$y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_1 b_n x^n$$

حتما جواب شامل تابع log است

اگر بجای 1 صفر بگذاریم باز گزینه درست است ولی درست تر 1 است

3. $r_1 > r_2$ و تفاضل ریشه ها عدد صحیح است — جواب اول با r بزرگتر

$$y_1 = x^{r_1} \sum_0 a_n x^n$$

در اکثر مواقع $k=0$ می شود

$$y_2 = k y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_0 b_n x^n$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

1- دوجواب مستقل معادله $3xy''+2y'+y=0$ به چه صورت است

$g(x) = \frac{2}{3}$ $\quad h(x) = \frac{x}{3}$

$r^2 + r\left(\frac{2}{3}-1\right) + 0 = 0$ $\quad r^2 - \frac{1}{3}r = 0$ $\quad r_1 = 0 \;,\; r_2 = \frac{1}{3}$

$y_1 = x^{1/3} \sum \text{—}$ $\quad , y_2 = \sum \text{—}$

$y = C_1 y_1 + C_2 y$

2- جوابهای مستقل

$3x(x+1)y'' + 2(x+1)y' + 4y = 0$

$g(x) = \frac{2(x+1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3}$ $\quad h(x) = \frac{4x}{3(x+1)}$

$r^2 + r\left(\frac{2}{3}-1\right) + 0 = 0$ $\quad r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{1}{3}$

مانند بالا

3- جواب مستقل قیدشده $x>0$ $\quad x^2y'' + 3xy' + (1+x)y = 0$

$g(x) = \frac{3x}{x} = 3$ $\quad h(x) = \frac{x(1+x)}{\cancel{x}}$

$r^2 + 2r + 1 = 0$ $\quad r_1 = r_2 = -1$

$y_1 = x^{-1} \sum a_n x^n$ $\quad y_2 = y_1 \ln x + x^{-1} \sum b_n x^n$

PAPCO

معادلهٔ بسل ۱

فرم کلی $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

سه جملهای که ضرب ... اگر در $x=0$ صفر می شود $x=0$ منفرد ...

$x=0 \Rightarrow g(x)=1 \quad , \quad h(x) = x^2 - \nu^2$

$r_1 = \nu_1$

$r_2 = -\nu$

اگر ν صحیح باشد حالت سوم
اگر ν صفر باشد حالت دوم

رابطهٔ بازگشتی معادله بسل $c_{n+2} = \dfrac{c_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}$ شعاع همگرایی سری بینهایت است و همه جا جواب می دهد

r_1 را در مسأله می گذاریم تا اگر در حالت سوم است ریشه بزرگتر باشد و اگر حالت دوم و ... است فرقی نمی کند

$a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}$

ν هر مقداری باشد جواب اول شکل هم است و اختلاف در جواب دوم است

$y_1 = x^{\nu} a_0(1 + \bigcirc x^2 + \square x^4 + \dots) = J_\nu(x)$ تابع بسل نوع اول
نیز

جاگذاری شود

معادله صادق است به ازای جمیع مقادیر a_0

$a_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}$
$\nu!$

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(\nu+m+1)} x^{2m}$$ تابع بسل نوع اول : جواب اول معادله بسل

جدول دارد و تا سه رقم ثبت اعشار حساب شده.

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

حتماً حالت 3 است اگر n صحیح باشد و حتماً n مخالف صفر می‌شود

$$(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x) \Rightarrow \int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = x^\nu J_\nu(x) + C$$

$$(x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \Rightarrow \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = \underset{\text{منفی}}{-}x^{-\nu} J_\nu(x) + C$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} \cancel{J}_\nu(x)$$

$\int J_0\,dx =$ غیرقابل ملاحظه

1- با توجه به فرمول $x J_n' = -n J_n + x J_{n-1}$ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^1 x(1-x^2) J_0\,dx = 2 J_2^2(1)$$

$$\int_0^1 x J_0\,dx = x J_1(x) \Big|_0^1 = J_1(1)$$

اگر به فرمول نفوذ را باید با جزء به جزء مطابق فرمولهای بالا شود

جزء به جزء

$$\int x^2 (x) J_0\,dx = x^2 x J_1 x \Big|_0^1 - 2\int_0^1 x^2 J_1\,dx = J_1(1) - 2x^2 J_2(x) \Big|_0^1$$

$$= 2 J_2(1)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2 - با توجه به $nJ_{n-1} = -nJ_n + nJ_{n+1}$ ... $nJ_n - nJ_{n+1}$ انتگرال را حساب کنید

$$\int_0^1 r^2 J_1(r)\,dr = J_2(1)$$

مثال:

$$\int x^2 J_2(x)\,dx = \int x^3 \left(x^{-1} J_2(x)\,dx\right) = -x^3 x^{-1} J_1(x) + 3\int x^2 x^{-1} J_1\,dx$$

$$\int x J_1\,dx = -x J_0 + \int J_0\,dx \quad \nu=0$$

جزء به جزء ← بعد ← $\nu=0$ را می‌گیریم

جوابهای دوم

برای حالت یک

$$y = A\,J_\nu(x) + B\,J_{-\nu}(x)$$

جواب دوم را : $J_{-\nu}(x)$ می‌گیریم

برای حالت دو

اگر y_1 و y_2 مستقل باشند هرکدام با ترکیب خطی هردو مستقل است و ترکیب خطی آنها هم جواب است

$$y_2 = J_0 \ln x + \sum_1 b_n x^n$$

جواب دوم $$Y_0 = a(J_0 + b y_2)$$

$$a = \frac{2}{\pi}, \quad b = \gamma - \ln 2$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

وقتی تفاضل عدد صحیح باشد که k صفر نیست

$$y_2 = k\, J_n(x) + x^{-n} \sum_0 b_n x^n$$

در حالت 2

$$y = A J_0(x) + B Y_0(x)$$

بعد $Y_n = a\,(J_n + b y_n)$

$$y = A J_n(x) + B Y_n(x)$$

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left(J_\nu(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)\right)$$ تابع بسل نوع دوم

به ازای این جواب معادله بسل می شود

$$y = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x)$$ تابع بسل نوع دوم

۱- اگر جواب معادله $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$ برابر $y = c_1 y_n + c_2 Y_0$

آنگاه جواب معادله زیر کدام است

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0$$

$$y = A J_\nu(\lambda x) + B Y_\nu(\lambda x)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2 ـ جواب معادله زیر کدام است

$x^2y'' + xy' + (25x^2 - \frac{9}{4})y = 0$

$z = 5x \rightarrow \frac{dz}{dx} = 5$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 5\frac{dy}{dz}$

$y'' = 5^2 \frac{d^2y}{dz^2}$

$z^2 \frac{d^2y}{dz} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - \frac{9}{4})y = 0$

$y = A\, J_{3/2}(5x) + B\, Y_{3/2}(5x)$

3 ـ

$\cancel{4}x^2y'' + \cancel{4}xy' + (\cancel{8}^{\,2}x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

$y = A\, J_{1/2}(\sqrt{2}x) + B\, Y_{1/2}(\sqrt{2}x)$

4 ـ

$x^2y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

5- جواب معادله کدام است

$xy'' - y' + xy = 0$ فرض مسئله $y = ux$ $\qquad y' = u + xu'$, $y'' = 2u' + xu''$

$x^2u'' + \cancel{2xu'} - u - \cancel{xu'} + xxu = 0 \Rightarrow x^2u'' + xu' + (x^2-1)u = 0$

$u = \underbrace{AJ_1(x) + BY_1(x)}$ $\qquad y = x(\qquad)$

6- سوال بالا با کدام یک از تغییر متغیرهای زیر تبدیل به بسل می شود

$y = ux$

$xy'' + (1+2\nu)y' + xy = 0$

با تغییر متغیر $y = x^{-\nu}z$ تبدیل به بسل می شود

7- جواب کدام است

$\cancel{9}x^2y'' + \cancel{9}xy' + 4(9x^4 - \frac{1}{4})y = 0$

$z = x^2 \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 2x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 2x\frac{dy}{dz}$

$y'' = 2\frac{dy}{dz} + (2x)^2\frac{d^2y}{dz^2}$

$\cancel{4}z^2\frac{d^2y}{dz^2} + \cancel{4}z\frac{dy}{dz} + \cancel{4}(z^2 - \frac{1}{9})y = 0$ $\qquad$ بسل با اندیس $\frac{1}{3}$

$y = AJ_{1/3}(x^2) + BY_{1/3}(x^2)$

PAPCO

معادله $x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - \nu^2) y = 0$ با تغییر متغیر $z = x^2$ تبدیل به معادله بسل با اندیس ν می شود

تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}^{-1} F(s) = f(t)$$

لاپلاس و لاپلاس معکوس خاصیت خطی دارند

$f(t)$	$F(s)$
k	$\frac{k}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{s^6} = \frac{2}{5!} \mathcal{L}^{-1} \frac{5!}{s^6} = \frac{2}{5!} t^5$$

$$, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha! \quad , \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^{3/2}} = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \mathcal{L}^{-1} \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} t^{1/2}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

1- اگر a یک عدد حقیقی باشد لاپلاس $f(t)=e^{iat}$ کدام است؟

$$=\frac{1}{s-ia}$$

2- $\mathcal{L}^{-1}\dfrac{8-6s}{16s^2+9}$ کدام است؟

$$\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\frac{8-6s}{s^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{1}{16}\left(8\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}-6\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)$$

$$\frac{1}{16}\left[8\times\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{4}t\right)-6\cos\left(\frac{3}{4}t\right)\right]$$

3- اگر $\mathcal{L}(f(t))=\dfrac{1}{s^4}$ آنگاه $f(t)=?$ ؟

$$f(t)=\frac{t^3}{6}$$

4- a و b را طوری تعیین کنید که تابع $\dfrac{as+b}{s^2+4}$ تبدیل لاپلاس تابع $2\sin 2t+4\cos 2t$ باشد؟

$$a=4\ ,\ b=4$$

5- مطلوبست $\mathcal{L}^{-1}\dfrac{4-5s}{s^{3/2}}$

$$=4\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{3/2}}-5\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{1/2}}=\frac{8}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}$$

6- حاصل $\int_0^\infty e^{-2t}\cos t\,dt$ کدام است؟

$$=\mathcal{L}\cos t\Big|_{s=2}=\frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=2}=\frac{2}{5}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

7-

$$\int_0^\infty e^{-3t}\sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-3t}\sin 2t\,dt = \mathcal{L}\ \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\Bigg|_{s=3}$$

اگر عامل e نباشد می‌توان s را صفر گرفت و توصیه می‌شود انتگرال‌های از ۰ تا ∞ را با لاپلاس حل کرد

تبدیل لاپلاس مشتق :

$$\mathcal{L}\, f'(t) = s\,\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\, f''(t) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

1. $f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1 \qquad \Rightarrow \frac{1}{s} = s\mathcal{L}(t) - 0 \qquad \Rightarrow \mathcal{L}(t) = ?$

2. $f(t) = e^t \Rightarrow f'(t) = e^t \qquad \Rightarrow \mathcal{L}(e^t) = s\mathcal{L}(e^t) - 1 \Rightarrow \mathcal{L}(e^t) = ?$

3. $f(t) = t\sin t \Rightarrow f'(t) = \sin t + t\cos t$

$f''(t) = 2\cos t - t\sin t$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\, f'' = \frac{2s}{s^2+1} - \mathcal{L}(t\sin t) = s^2\mathcal{L}(t\sin t) - 0 - 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t\sin t) = ?$$

۱- هرگاه $y'' - y' + y = t$ ، $y(0) = y'(0) = 0$ آنگاه لاپلاس y کدام است

هرگاه معادله شرایط مرزی در نقطه ۰ داشته باشد از لاپلاس حل شود راحت‌تر است.

$$\mathcal{L}y'' - \mathcal{L}y' + \mathcal{L}y = \mathcal{L}t \qquad s^2Y - sY + Y = \frac{1}{s^2} \qquad Y = ?$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

قضایای انتقال:

۱- انتقال بر محور sها:

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}F(s-a) = e^{at}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}F(s)}_{f(t)}$$

1- تبدیل لاپلاس $2e^{-2t}\sin 2t$ کدام است

$$\mathcal{L}\,2e^{-2t}\sin 2t = 2 \times \frac{2}{(s+2)^2+4}$$

2- لاپلاس معادله روبرو کدام است $f(t) = e^{3t}(2\cos 5t - 3\sin 5t)$

$$\frac{2s}{s^2+25} - \frac{15}{s^2+25} = \frac{2(s-3)}{(s-3)^2+25} - \frac{15}{(s-3)^2+25}$$

3- لاپلاس $f(t) = e^{-t}\cos t$ کدام است

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

4- لاپلاس $f(t) = e^{t}\overbrace{\int_0^t xe^{x}\,dx}^{f_1(t)}$ کدام است

$$F(s) = F_1(s-1)$$

$$F_1(s) = \mathcal{L}\int_0^t xe^{x}\,dx = \frac{1}{s}F_2(s)$$

$$F_2(s) = \mathcal{L}\,(te^{t}) = F_3(s-1)$$

$$F_3(s) = \mathcal{L}\,t = \frac{1}{s^2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

5- تبدیل معکوس $\frac{1}{\sqrt{9s-1}}$ کدام است؟

$$\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\sqrt{s-\frac{1}{9}}}=\frac{1}{3}e^{\frac{t}{9}}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{1/2}}}_{\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}}$$

6- تبدیل معکوس $\frac{s-1}{s^2-2s+5}$ کدام است؟ مخرج باید مربع کامل شود.

گام به گام در صورت‌ها مانند کامل مخرج را درست می‌کنیم

$\frac{3s+7}{}$ 7

$$\frac{s-1}{s^2-2s+5}=\frac{(s-1)}{(s-1)^2+4}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}=e^t\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+4}=e^t\cos 2t$$

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}=e^t\mathcal{L}^{-1}\frac{3s+10}{s^2-4}=e^t(3\cosh 2t+5\sinh 2t$$

$$\frac{2s+3}{s^2+4s+4}=\frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}=e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2s+7}{s^2}=e^{2t}(2+7t)$$