Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y = x^2 + c \Rightarrow y' = 2x$

تشکیل
برای تعیین معادله دیفرانسیل یک دسته منحنی یک پارامتری باید پارامتر بین معادله و مشتق آن حذف شود

$y = cx^2 + 4 \qquad y' = 2cx \Rightarrow y = \frac{y'}{2}x + 4$

$y = x^2 + ax + b$
$y' = 2x + a$
$\boxed{y'' = 2}$

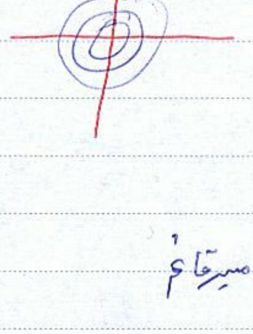
$y = ax^2 + bx + 5$
$y' = 2ax + b$
$y'' = 2a$

اگر یک دسته منحنی n پارامتر داشته باشد و بخواهیم معادله دیفرانسیل آن را پیدا کنیم باید n پارامتر را بین خود منحنی و مشتقاتش حذف کنیم

مسیرهای قائم

هرگاه هر دو منحنی از دسته منحنی‌های دو معادله بر هم عمود باشند یکی از منحنی‌ها را مسیرهای قائم دسته منحنی دیگر می‌گوییم

$y = ax \qquad y^2 + x^2 = c^2$



معادله معلوم ← مسیر اصلی
معادله‌ای که بدست می‌آید ← مسیر قائم

قدم ۱ برای تعیین مسیرهای قائم باید معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را تشکیل داد

$y = ax \qquad y' = a \qquad y' = \frac{y}{x}$

قدم ۲ تشکیل معادله دیفرانسیل مسیر قائم:

هرکجا y' داریم آن را با $-\frac{1}{y'}$ عوض می‌کنیم:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0 \qquad y^2 + x^2 = c^2$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول:
الزاماً باید y' را داشته باشد

$$F(x, y, y') = 0$$

مرتبه اول

۱- نسبت به مشتق حل می‌شوند $\qquad 4xy' + 3y - 1 = 0$

۲- نسبت به مشتق حل نمی‌شوند $\qquad \cos y' + 3xe^{y'} - 2y = 2$

۱- نسبت به مشتق حل می‌شوند:
به فرم زیر است:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$h(x,y) = h_1(x) \cdot h_2(y)$ تابع حاصلضرب دو تابع یکی از x و دیگری از y است

$$\Rightarrow f_1(x) f_2(y) dx + f_3(x) f_4(y) dy = 0 \qquad \times \frac{1}{f_2 f_3}$$

$H(x)dx + G(y)dy = 0 \Rightarrow$ معادله تفکیک پذیر است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر معادله تفکیک پذیر بود آنگاه

$H(x)dx + G(y)dy = 0$

$\int \quad + \int \quad = c$

۱-

$(1+x^3)\,dy - x^2 y\,dx = 0$

$\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + \ln c$

$\ln y^3 = \ln(1+x^3) + \ln c \Rightarrow y^3 = c(1+x^3)$

۲-

$x\frac{dy}{dx} + y^2 = 4 \Rightarrow x\,dy + (y^2-4)\,dx = 0$

$\frac{dy}{(y^2-4)} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x = \ln c$

$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x^4 = \ln c \Rightarrow \frac{y-2}{y+2} = \frac{c}{x^4}$

۳- حد جواب مسأله زیر وقتی $x \to \infty$ برابر است با

$y' = 2x\cos^2 y \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}$

۱- π

۲- $\frac{\pi}{4}$

۳- ✓ $\frac{\pi}{2}$

۴- ∞

$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2x\,dx \qquad \tan y = x^2 + c \quad x=0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} y = \operatorname{Arctan}(x^2+1) = \frac{\pi}{2}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

4- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید

$$x(y-1)\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \frac{y-1}{y}dy=\frac{dx}{x}$$

$$y=\ln xy+c$$

معادلاتی به صورت معادله تابعی از یک خط:

$$y'=f(ax+by+c)$$

$$y'=2x+y-1 \quad , y'=tg(3x+4y)+2 \quad , y'=e^{4x-y+3}+\sqrt{4x-y+3}-1$$

$$u=ax+by+c \quad , y'=f(u)$$

اگر f تابعی از یک خط باشد می توان خط را به صورت u گرفت و معادله را به معادله تفکیک پذیر تبدیل کرد

$$y'=(y-4x)^2 \Rightarrow u=y-4x \Rightarrow u'=y'-4$$:5

$$\Rightarrow y'=u^2 \Rightarrow u'+4=u^2 \quad \frac{du}{u^2-4}=dx$$

$$\frac{1}{4}\ln$$

$$y'=(x+y)^2 \quad u=x+y \Rightarrow y'=u'-1$$:6

$$u'-1=u^2 \quad \frac{du}{u^2+1}=dx \quad tg^{-1}u=x+c$$

$$x+y=tg(x+c)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y' = e^{2x+y-1} - 2 \Rightarrow u = 2x+y-1 \quad u' = 2 + y'$:7

$u' \cancel{-2} = e^{u} \cancel{-2} \qquad e^{-u}\,du = dx$

$-e^{-u} = x + c$

همگن :2

$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} h(x, y) \Rightarrow$ همگن است

در رابطه $p(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ اگر دو ضریب P و Q همگن با درجه همگنی مساوی باشند $\Rightarrow$ معادله ما را همگن است و اگر همگن بود می توان بجای $y = vx$ قرار داد

$\Rightarrow y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

:8

$x\dfrac{dy}{dx} = x\,tg\left(\dfrac{y}{x}\right) + y = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = tg\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}$

$\cancel{v} + x\dfrac{dv}{dx} = tg\,v + \cancel{v}$

$\cot g\, v\,dv = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln \sin v = \ln cx$

$\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = cx \qquad y = x \sin^{-1}(cx)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹- همگن درجه صفر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+y^3}{xy^2} = \frac{2+v^3}{v^2}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + \frac{2}{v^2} \qquad 2\frac{dx}{x} = v^2 dv$$

$$\frac{1}{3}v^3 = 2\ln x + c \qquad \frac{y^3}{x^3} = 6\ln x + c \Rightarrow y = x\sqrt[3]{}$$

۱۰: همگن از درجه صفر

۱- ۱

۲- ۰ ✓

۳- ∞

۴- موجود نیست

$$y' = \frac{x^2+2y^2}{xy} \quad \div x = 0 = \frac{1+2v^2}{v^2}$$

$$\cancel{v} + xv' = \frac{1+2v^2}{v^2} - v = \frac{1+v^2}{v}$$

$$\frac{v}{1+v^2}dv = \frac{dx}{x} \qquad \ln(1+v^2) = \ln cx^2$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx^2 \qquad x^2+y^2 = cx^4 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$$

نکته: تمام معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$ که صورت و مخرج معادله یک خط باشند که از مبدأ بگذرد هم همگن از درجه صفر می باشد.

$$y = \frac{x+3y+1}{2x-y+4}$$ همگن نیست

$$y = \frac{ax+by+c}{ex+hy+n}$$ (همگن نیست)

در این معادله که همگن نیست مبدأ مختصات را به محل تلاقی دو خط منتقل کنیم به شرطیکه دو خط موازی نباشند

الف - دو خط موازی :

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right) \qquad u = ax+by$$

با تغییر متغیر u ، y کاملاً جدا از هم می‌شوند

11- $$y' = \frac{y-x}{y-x-1} \qquad u = y-x \Rightarrow y' = u'+1$$

$$u'+1 = \frac{u}{u-1} \qquad u' = \frac{u}{u-1} - 1 = \frac{1}{u-1} \Rightarrow (u-1)\,du = dx$$

$$(u-1)^2 = 2x + C$$

12- $$y' = \frac{x-y}{2x-2y+1} \qquad u = x-y \Rightarrow y' = 1-u'$$

$$1-u' = \frac{u}{2u+1} \qquad -u' = \frac{u}{2u+1} - 1 = -\frac{u+1}{2u+1}$$

$$\frac{(2u+1)^{+1-1}}{u+1}\,du = dx \qquad 2u - \ln(u+1) = x + C$$

13-

$$(3y+2x+4)\,dx - (4x+6y+5)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{4x+6y+5} \qquad u = 2x+3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}u$$

$$y' = \frac{1}{3}(u'-2) = \frac{u+4}{2u+5} \Rightarrow \frac{3u+12}{2u+5} = (u'-2)$$

$$u' = \frac{7u+22}{2u+5} \Rightarrow \frac{2u+5}{7u+22}\,du = dx$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

دو خط متقاطع باشند

ب : متقاطع

محل تلاقی (x_0 , y_0)

$$\begin{aligned} a x_0 + b y_0 + c &= 0 \\ e x_0 + h y_0 + n &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \overset{\text{جدید}}{X} + x_0 \qquad dx = dX \\ y &= \overset{\text{جدید}}{Y} + y_0 \qquad dy = dY \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{eX+hY}\right) \Rightarrow Y = vX$$

تغییر متغیر

$$y' = \frac{x-y+2}{x+y-1}$$

-14

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad x_0 = -\tfrac{1}{2} \qquad y_0 = \tfrac{3}{2}$$

$x = X - \frac{1}{2}$ و $y = Y + \frac{3}{2}$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1-v}{1+v} \qquad X\frac{dv}{dX} = \frac{1-v}{1+v} - v = \frac{-v^2-2v+1}{1+v}$$

$$-\frac{1+v}{v^2+2v-1}\,dv = \frac{dX}{X}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

3 - کامل

معادله $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را کامل گوییم اگر تابعی مانند $U=U(x,y)$ موجود باشد بطوری که

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q$$

$$dU=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dU=Pdx+Qdy=0$$

$\Rightarrow du=0 \qquad \Rightarrow U=C$ — به عنوان تابعی از x و y ثابت است

اگر $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ شد معادله دیفرانسیل کامل می‌شود.

13: جواب معادله که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+y\cos x}{4y^3-\sin x}$

$$(\overset{P}{3x^2+y\cos x})dx+(\overset{Q}{\sin x-4y^3})dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos x \quad \Rightarrow$$ کامل است

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y\cos x \quad \Rightarrow \quad u=x^3+y\sin x+f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cancel{\sin x}+f'(y)=\cancel{\sin x}-4y^3 \quad \rightarrow f'(y)=-4y^3$$

$$x^3+y\sin x-y^4=C \qquad x=0\ ,\ y=0 \Rightarrow C=0$$

مثال 14: a را طوری تعیین کنید تا معادله زیر یک معادله کامل باشد

$$(aye^{xy}+2xy)dx+(xe^{xy}+x^2)dy=0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = a e^{xy} + axy e^{xy} + \cdots \qquad a e^{xy} = e^{xy} \Rightarrow a = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = e^{xy} + yx e^{xy} \cdots$$

مثال 15: معادله دیفرانسیل کامل است مقدار a کدام است

$$(x^{-1} + y^{-1})\,dx + a\,xy^{-2}\,dy = 0$$

مثال 16: $y'(y^2 - x) = y$ چه جوابی دارد؟

$$y\,dx + (x - y^2)\,dy = 0$$

$$U = \int y\,dx + f(y) \qquad U = yx + f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \cancel{x} + f'(y) = \cancel{x} - y^2 \Rightarrow f'(y) = -y^2 \Rightarrow f(y) = -\frac{1}{3}y^3$$

$$U = yx - \frac{1}{3}y^3 = c$$

مثال 17: $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0 \quad , \quad y(1) = 1 \Rightarrow y(0) = ?$

[illegible] $U = \int (x - y)\,dy + f(x) \Rightarrow U = xy - \frac{1}{2}y^2 + f(x)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cancel{y} + f'(x) = x + \cancel{y} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$U = xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c = 1$$

$$y(0) \Rightarrow y^2 = -2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر دیفرانسیل کامل نشود اصلاً قادر به حل مسأله نیستیم

$x\,dy - y\,dx = 0$ کامل نیست -1 و $+1$

$\frac{1}{xy} \cdots = \frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0$ کامل است 0 و 0

$\frac{1}{x^2} \cdots = \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$ $-\frac{1}{x^2}$ و $-\frac{1}{x^2}$ 〃

$\frac{1}{y^2} \cdots = \frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx = 0$ $\frac{1}{y^2}$ ، $\frac{1}{y^2}$ 〃

عوامل غیر صفری که در یک معادله ناکامل ضرب می‌شوند و معادله را کامل می‌کنند را عامل انتگرال ساز گوییم.

فاکتور انتگرال $F = F(x,y) \neq 0$ تابعی است از (x,y) (در حالت کلی) مخالف صفر به طوری که اگر در طرفین یک معادله‌ی دیفرانسیل ناکامل ضرب شود دیفرانسیل را کامل کند

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$(FP)\,dx + (FQ)\,dy = 0 \Rightarrow u = c$$

جوابی که از این طریق بدست می‌آید (u) همان جواب مسأله است.

$f_1(x)\, f_2(y)\, dx + f_3(x)\, f_4(y)\, dy = 0$

$\frac{1}{f_2 f_3}$ فاکتور انتگرال معادلات جدا از هم

$\frac{1}{xP + yQ}$ بهتر است از روش قبلی حل شوند همگن 〃 〃 〃

اگر معادله ای جواب داشته باشد حتماً یک و بینهایت فاکتور انتگرال ساز دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$F = e^{\int f(x)\,dx} \longleftarrow \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$$ اگر

$$F = e^{\int f(y)\,dy} \longleftarrow \frac{-1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(y)$$ اگر

اگر عوامل غیر جبری نباشد مدل ln خوب کار می‌کند $x^{\alpha} y^{\beta}$

مثال 18:

$$(xy + y^2)\,dx - (x^2 + xy)\,dy = 0$$

1. بیش از یک عامل انتگرال ساز دارد ✓
2. کامل است.
3. فقط یک عامل انتگرال ساز تابعی از x دارد غ
4. 〃 〃 y 〃 〃 〃 〃 〃 غ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y$$

کامل نیست #   اضافه $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 3(x+y)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x - y$$

$$\frac{3(x+y)}{Q = -x(x+y)} = -\frac{3}{x} \qquad F = e^{-3\int \frac{dx}{x}} = e^{-3\ln x} = 1/x^3$$

یا

$$-\frac{3(x+y)}{P = y(x+3)} = -\frac{3}{y} \qquad F = 1/y^3$$

یا

$$x^{\alpha} y^{\beta}(xy + y^2)\,dx - x^{\alpha} y^{\beta}(x^2 + xy)\,dy = 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\beta+2)x^{2}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} - (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\begin{cases} \beta+1 = -\alpha-2 \\ \beta+2 = -\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow$$ جواب می دهد پس می توانیم از این عامل انتگرال‌ساز استفاده کرد

$\alpha+\beta=-3$ بینهایت جواب دارد ولی چون α و β مشخص نیستند باید از استفاده نمی شود

مثال ۱۹ :

$x^{\alpha}y^{\beta}$ جواب نمی دهد

$$(1+x^2)\,dy - (\tan^{-1}x - y)\,dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \text{تفاضل} \Rightarrow 1-2x$$

$$\frac{1-2x}{Q = 1+x^2} = f(x) \qquad e^{\tan^{-1}x - 2x(1+x^2)} \qquad \Rightarrow \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

مثال 20 : عبارت $x^{\alpha}y^{\beta}$ عامل انتگرال‌ساز معادله زیر است $\alpha+\beta$ کدام است

2   1 -1 -2

$$(x^2+xy^2)\,y' - 3xy + 2y^3 = 0$$

$$x^{\alpha}y^{\beta}(2y^3-3xy)\,dx + x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(\beta+3)x^{\alpha}y^{\beta+2} - 3(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} 2(\beta+3)=\alpha+1 \\ -3(\beta+1)=\alpha+2 \end{cases} \qquad \alpha=1,\quad \beta=-2$$

$\alpha+\beta=-1$

مثال 21:

$2xy\,dx+(4y+3x^2)\,dy=0$

$\frac{\partial P}{\partial y}=2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=6x \qquad$ تفاضل $=-4x$

$\frac{-4x}{-2xy}=\frac{2}{y} \qquad 22ny \Rightarrow F=y^2$

$y^2\times(\qquad)=0$

$2xy^3\,dx+(4y^3+3x^2y^2)\,dy=0$

$u=x^2y^3+f(y) \Rightarrow \cancel{3x^2y^2}+f'(y)=4y^3+\cancel{3x^2y^2}$

$f(y)=y^4 \qquad (x^2y^3+y^4=C)$

مثال 22: عامل انتگرال ساز بدلواه

$2\sin y^2\,dx+xy\cos y^2\,dy=0$

$\frac{\partial P}{\partial y}=4y\cos y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=y\cos y^2 \qquad$ تفاضل $=3y\cos y^2$

$\frac{3y\cos y^2}{xy\cos y}=\frac{3}{x} \Rightarrow F=x^3$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

23 : فاکتور انتگرال ساز

$$y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dx = 0$$

$x e^{2x}$

$\frac{e^{2y}}{x}$

$\frac{e^{2y}}{y}$

$y e^{2y}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad$ تفاضل $= 1-2y$

$\to \frac{1-2y}{-y} = 2 - \frac{1}{y} \qquad 2y - \ln y \qquad F = e^{2y-\ln y}$

$$F = \frac{e^{2y}}{y}$$

24 :

$$dx + 2xy\,dy = y e^{-y^2}\,dy$$

e^{y^2}

e^{x^2}

e^{-x^2}

e^{-y^2}

$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad$ تفاضل $= -2y$

$\frac{-2y}{-1} = 2y \qquad F = e^{y^2}$

25 : α و β را طوری تعیین کنید که $x^{\alpha} y^{\beta}$ یک فاکتور انتگرال برای معادله زیر باشد

$$y\,dx + x(1 - 3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$x^{\alpha} y^{\beta+1} dx + x^{\alpha+1} y^{\beta}(1 - 3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)(x^{\alpha} y^{\beta}) + 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+1)x^{\alpha} y^{\beta} - 3(\alpha+3)x^{\alpha+2} y^{\beta+2}$$

$\alpha = \beta = -3 \qquad \alpha = -3$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

26: فاکتور انتگرال ساز ؟

به y بستگی ندارد

$$x^2 dy - xy\,dx = (x-2)e^{x}\,dx$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \qquad \text{تفاضل} = -3x$$

$$\frac{-3x}{x^2} = \frac{-3}{x} \qquad F = \frac{1}{x^3}$$

27: جواب عمومی معادله کدام است

$$(1+y^2)dx = (tg^{-1}y - x)\,dy$$

$$(1+y^2)dx + (x - tg^{-1}y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \qquad \text{تفاضل} \quad 2y-1$$

$$-\frac{2y-1}{1+y^2} \Rightarrow tg^{-1}y - \ln(1+y^2) \Rightarrow F = e^{tg^{-1}y}/1+y^2$$

$$\underbrace{e^{tg^{-1}y}\,dx + (x - tg^{-1}y) \cdot e^{tg^{-1}y}/1+y^2\,dy}_{} = 0$$

$$u = xe^{tg^{-1}y} + f y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(\cancel{1+tg}\,\frac{1}{1+y^2}\right)e^{tg^{-1}y} + f'(y) =$$

$$f(y) = -\int \frac{tg^{-1}y}{1+y^2}\,e^{tg^{-1}y}\,dy$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$z y^{-1} y = T \Rightarrow (z y^{-1})' =$

$fy = -\int T e^{T} dT$

مثال: 28

$y(x^2-y)dx + x(x^2+3y)dy$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2-1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$ تفاضل $= -1-2x^2$ نتیجه می‌دهد

$x^{\alpha} y^{\beta+1}(x^2-y)\,dx + x^{\alpha+1} y^{\beta}(x^2+3y)\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1) y^{\beta} x^{\alpha+2} - (\beta+2) x^{\alpha} y^{\beta+1}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+3) x^{\alpha+2} y^{\beta} + 3(\alpha+1) x^{\alpha} y^{\beta+1}$

$\beta+1 = \alpha+3 \qquad \beta - \alpha = 2 \qquad \alpha = -\frac{7}{4}$

$-(\beta+2) = 3(\alpha+1) \qquad 3\alpha + \beta = -5 \qquad \beta = \frac{1}{4}$

$-\beta - 2 = 3\alpha + 3$

اگر معادله‌ای به فرم $y' + yf(x) = r(x)$ بیان شود معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول می‌شود

اگر مرتبه خطی بود انشوع $\quad (yf(x) - r(x))\,dx + dy = 0$

همگن معادله‌ای نیز نیست

$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ تفاضل $= f(x)$

$\left(F = e^{\int f(x)\,dx} \right)$ عامل انتگرال ساز معادلات خطی ← طول می‌کشد حفظ شود

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y' + y f(x) = r(x)$ $\qquad h(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow y = e^{-h(x)}\left[\int r(x) e^{h(x)}\,dx + c\right]$

یا $\frac{dx}{dy} + x f(y) = r(y)$ جای x و y در معادله عوض شود

$y' - y\,tg\,x = 2\cos x$ $\qquad$ مثال دیگر $= 2$ $\qquad$:28

$\ln \cos x$ $\qquad y = \frac{1}{\cos x}\left[\int 2\cos^2 x\,dx + c\right]$

$xy' - y = x^2\cos x$ $\qquad$:29

$y' - \frac{1}{x} = x\cos x$

$h(x) = -\ln x$ $\qquad y = x\left[\int \frac{\cancel{x}\cos x}{\cancel{x}}\,dx + c\right]$

:30

$dy + (y\,cotg\,x - e^{\cos x})\,dx = 0 \quad , \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$

هرگاه y و y′ تک در مسأله دیده شود باید خطی بودن چک گردد

$\frac{dy}{dx} + y\,cotg\,x = e^{\cos x}$

$h(x) = +\ln\sin x$ $\qquad y = \frac{1}{\sin x}\left[\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx + c\right]$ $\qquad c = 2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

31: جواب مسائل زیر در $x=e$ کدام است. $y(1)=2$ $x>0$

$$x^2y' + xy = 1 \Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = \ln x$$

$$y = \frac{1}{x}\left[\int \frac{1}{x^2}\, x\, dx + c\right]$$

32: $y' - xy - 2x = 0$

33: $xy' + y - x^2 = 0$

34: $xy' - y = 3x^4$

35: $\dfrac{xy' - y}{x^2} + \dfrac{y}{x} = e^{-x}$ $\quad t = \dfrac{y}{x}$

$$t' + t = e^{-x}$$

$h(x) = x$ $\Rightarrow \dfrac{y}{x} = e^{-x}\left[\int e^{-x} e^{x}\, dx + c\right]$

36: جواب معادله برحسب $\lambda = \dfrac{1}{\cos y}$ کدام است

$$\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y) \qquad \cos y = \frac{1}{\lambda}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' \sin y = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} \qquad \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda = -x$$

$$\lambda = e^{x}\left[\int -x e^{-x}\,dx + c\right]$$

$h(x) = -x$

$$(1+y^2)\,dx = (\operatorname{tg}^{-1}y - x)\,dy \text{ : } 37$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\operatorname{tg}^{-1}y}{1+y^2}$$

$h(y) = \operatorname{tg}^{-1}(y)$

$$x = e^{-\operatorname{tg}^{-1}(y)}\left[\int \frac{\operatorname{tg}^{-1}y}{1+y^2}\, e^{\operatorname{tg}^{-1}y}\,dy + c\right]$$

$\int u e^{u}\,du$

معادله برنولی:

صورت کلی

$$y' + y\,f(x) = y^{\alpha}\,r(x)$$

برای حل مسأله طرفین را بر y^{α} تقسیم می کنیم سپس تغییر متغیر $u = y^{1-\alpha}$ می گیریم سپس معادله تبدیل به معادله خطی می شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

38 : در معادله زیر کدام تغییر متغیر آن را خطی می‌کند.

$$y' + y\sin x = y^3\cos x$$

39 : جواب معادله؟ $y' = xy^2 - y$ $\quad y^{-2}$

$$y' + y = xy^2 \qquad \alpha = 2$$

$$y'y^{-2} + y^{-1} = x \qquad u = y^{-1} \qquad u' = -y'y^{-2}$$

$$u' - u = -x$$

$$h(x) = -x \qquad \frac{1}{y} = u = e^{x}\left[\int -x e^{-x}\, dx + c\right]$$

40 : $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

$$y'y^{-2} + y^{-1} = \cos x - \sin x$$

$$u = y^{-1} \rightarrow u' = -y'y^{-2}$$

$$u' - u = \sin x - \cos x$$

$$h(x) = -x \qquad \frac{1}{y} = e^{x}\left[\int -\cancel{x}\, e(\sin x - \cos x)e^{-x}\, dx + c\right]$$

41 : $y' = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy}$

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{y} \qquad \alpha = -1$$

$$y'y - \frac{2}{x}y^2 = x \qquad v = y^2,\ v' = 2yy'$$

$$u' - \frac{4}{x}u = 2x$$

$$h(x) = -4\ln x \qquad u = y^2 = x^4\left[\int 2x\frac{x}{4}\, dx + c\right]$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$y' + y = \frac{x}{y}$$:42

$$y' + y = (x-1)y^2$$:43

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos x^2}{y}$$:44

$$xy' + y = xy^3$$:45

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3} \qquad \frac{dx}{dy} - xy = \frac{y^3}{x}$$:46

برنولی نسبت به x واسطه

$$x\frac{dx}{dy} - x^2 = y^3 \qquad V = x^2 \ , \quad \frac{dV}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} - 2yu = 2y^3$$

$$h(y) = -y^2 \qquad U = x^2 = e^{y^2}\left[\int 2y^3 e^{-y^2}\,dy + c\right]$$

$t=y^2$ $\Leftarrow$ جزء به جزء

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسیرهای قائم:

$f(x,y,c)=0$

47: معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم همه دوایری که از مرکز می‌گذرد و مرکز آنها بر روی محور x است کدام است

$(x-c)^2+y^2=c^2$

حتی المقدور سعی بر این است c بر یک طرف کشیده شود تا مشتق آن صفر گردد

$x^2+y^2=2cx$

$x+yy'=c$ $\quad x^2+y^2=2x(x+yy')$

$y^2-x^2=2xyy'$ $\quad \frac{-1}{y'}$ $\quad y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$ معادله خطوط قائم

48: مسیرهای قائم دسته منحنی $xy=c$ کدام است

$y+xy'=0$

$y+x\left(\frac{-1}{y'}\right)=0$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم $\Rightarrow yy'=x \quad ydy=xdx$

$y^2-x^2=a$

49: معادله مسیرهای قائم $y=cx^2$ کدام است

$y=cx^2$
$y'=2cx$ $\quad \frac{y}{y'}=\frac{x}{2}$ $\quad -\frac{1}{y'}$ $\quad -yy'=\frac{x}{2} \Rightarrow -2y\,dy=\frac{x}{2}dx$

$\frac{1}{2}x^2+y^2=c$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x^3y - xy^3 = c$ -50

$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -51

-52 معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم را بدست آورید $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$

$2yy' - 2x = 3cx^2 \Rightarrow y^2 - x^2$

$\div \quad y^2 - x^2 + 1 = cx^3$

$= \frac{2yy' - 2x}{y^2 - x^2 + 1} = \frac{3}{x} \qquad 2xyy' = 3y^2 - x^2 + 3 \qquad \frac{-1}{y'}$

$y' = \frac{-2xy}{3y^2 - x^2 + 3}$

معادله اصلی منحنی از حذف c بین خودش و معادله دیفرانسیل آن بدست می آید

معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

مسیرهای قائم در مختصات قطبی $f(r, \theta, \frac{dr}{d\theta})$ منحنی

$f(r, \theta, -r^2\frac{d\theta}{dr})$ قائم بر آ

Subject:

Year. Month. Date. ( )

: 53

$r = C(1 + \sin\theta)$

$\frac{dr}{d\theta} = C\cos\theta$ $\qquad \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

$\frac{r}{-r^2 \frac{d\theta}{dr}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم بر منحنی اصلی

$\frac{-dr}{r} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\, d\theta \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$-\ln r = -\ln k(1-\sin\theta)$

$r = k(1-\sin\theta)$

معادله مسیرهای قائم: 54

$r = 2C\cos\theta$

$\frac{r}{dr/d\theta} = -\cot\theta$

$dr/d\theta = -2C\sin\theta$

$\frac{r}{-r^2 \frac{d\theta}{dr}} = -\cot\theta$ $\qquad \frac{dr}{r} = \cot\theta\, d\theta$

$\ln r = \ln a\sin\theta$ $\qquad \underline{r = a\sin\theta}$

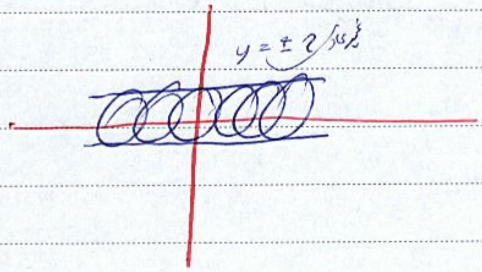
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جواب غیرعادی

منحنی تماسی آن با کلیه منحنیهای جواب عمومی (دسته منحنی) و هر کدام در یک نقطه مماس می شود

$$y^2(1+y'^2)=4 \Rightarrow \begin{cases}(x-c)^2+y^2=4 \\ -2(x-c)=0 & \text{مشتق نسبت به } c\end{cases}$$



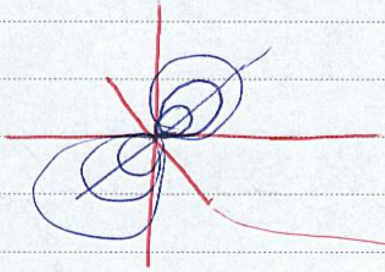
پوش یک دسته منحنی منحنی است که بر کلیه منحنی‌های جواب عمومی (دسته منحنی) و هر کدام در یک نقطه مماس می شود.

برای بدست آوردن پوش c را از این دسته منحنی و مشتق آن نسبت به c حذف می کنند.

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

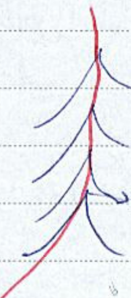
دوایری را نشان می دهد که از مرکز می گذرند و مرکزشان $(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$
روی نیمساز است.



$$(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$$
$$-2(x-c)-2(y-c)=4c$$

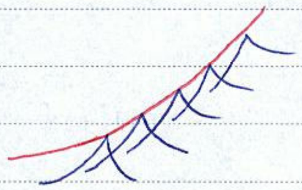
$$x+y=0$$

تمام $x+y=0$ پوش نیست فقط $(0,0)$



دارای نقاط مشترک وجود ندارد

پوش نیست



برای این نقاط ~~[illegible]~~ استثنایی دیوانی را بدست آوریم داریم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0 \end{cases}$$

اگر یک دسته منحنی ~~[illegible]~~ همچنین نقاط استثنایی داشته باشد از رابطه

$\frac{\partial F}{\partial c}=0$

$F(x,y,c)=0$

هم بدست می آید که باید جوابهای بدست آمده از رابطه های قبل را از این رابطه ها حذف کرد