« به نام خدا »

تمرین صفحه ۱۵۲

۱. نشان دهید که

a) $\underbrace{\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|}_{A} \leqslant |z_1|+|z_2|$; $\overline{|z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|}^{B}$

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases} \Rightarrow A: \left| \sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2} \right| \leqslant \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} \cancel{x_1^2}+\cancel{y_1^2}+\cancel{x_2^2}+\cancel{y_2^2}-\cancel{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \leqslant$$

$$\leqslant \cancel{x_1^2}+\cancel{x_2^2}-\cancel{2}x_1x_2+\cancel{y_1^2}+\cancel{y_2^2}-\cancel{2}y_1y_2$$

$$\longrightarrow \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geqslant x_1x_2+y_1y_2$$

$$\longrightarrow \cancel{x_1^2x_2^2}+\cancel{y_1^2y_2^2}+y_1^2x_2^2+y_2^2x_1^2 \geqslant \cancel{x_1^2x_2^2}+\cancel{y_1^2y_2^2}+2x_1x_2y_1y_2$$

$$\longrightarrow (x_1y_2-y_1x_2)^2 \geqslant 0$$ بدیهی

---

b) $\underbrace{\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leqslant |z|}_{A} \leqslant |x|+|y|$; $\overline{|z| \leqslant |x|+|y|}^{B}$: $z = x+iy$

$$A: \frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{توان دو}} x^2+y^2+2|x||y| \leqslant 2x^2+2y^2$$

$$\rightarrow x^2+y^2-2|x||y| \geqslant 0 \longrightarrow (|x|-|y|)^2 \geqslant 0$$ بدیهی

$$B: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant |x|+|y| \xrightarrow{\text{توان دو}} x^2+y^2 \leqslant x^2+y^2+2|x||y| \rightarrow |xy| \geqslant 0$$

$$B: \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2 \leqslant x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$-(x_1x_2+y_1y_2) \leqslant \sqrt{(x_1^2+y_1^2)}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$ — اگر $x_1x_2+y_1y_2$ [illegible] باشد بدیهی است

اگر منفی باشد $\xrightarrow{\text{توان دو}} x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2 \leq (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

$$\Rightarrow (x_1y_2-y_1x_2)^2 \geq 0$$

---

c) $\left|\dfrac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leq \dfrac{|z_1|}{\big||z_2|-|z_3|\big|} \Rightarrow \dfrac{|z_1|}{|z_2+z_3|} \leq \dfrac{|z_1|}{\big||z_2|-|z_3|\big|} \xRightarrow{\text{تقسیم بر } |z_1|}$

$\dfrac{1}{|z_2+z_3|} \leq \dfrac{1}{\big||z_2|-|z_3|\big|} \xRightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} \big||z_2|-|z_3|\big| \leq |z_2+z_3|$ $\qquad \begin{cases} z_2 = x_2+iy_2 \\ z_3 = x_3+iy_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \left|\sqrt{x_2^2+y_2^2}-\sqrt{x_3^2+y_3^2}\right| \leq \sqrt{(x_2+x_3)^2+(y_2+y_3)^2}$

$\xRightarrow{\text{توان دو}} -\sqrt{x_2^2+y_2^2}\sqrt{x_3^2+y_3^2} \leq x_2x_3+y_2y_3$: اگر $x_2x_3+y_2y_3>0$ باشد بدیهی است اما اگر منفی باشد

$\xRightarrow{\text{توان دو}} (x_2^2+y_2^2)(x_3^2+y_3^2) \geq (x_2x_3+y_2y_3)^2 \Rightarrow (x_2y_3-x_3y_2)^2 \geq 0$ یعنی

---

d) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

$\xrightarrow{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab} |z_1+z_2+z_1-z_2|^2-2(|z_1|^2-|z_2|^2)$

$4|z_1|^2-2|z_1|^2+2|z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

به کمک شکل دادن حالات اول نیز می‌توان رسید

---

۲. مقدار هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید ؟

a) $\sqrt{-i}$

← ادامه

$\sqrt{-i} = z \Rightarrow z^2 = -i = e^{-\pi/2\, i}$ $\quad z = e^{i((-\pi/2 + 2k\pi)/2)}$

$z_1 = e^{i(-\pi/4)}$ $\quad z_2 = e^{i(-\pi/4 + \pi)} = e^{i3\pi/4}$ $\quad k = 0, 1$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

---

b) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}} = z$ $\quad z^2 = 1 - i\sqrt{3}$ $\quad \theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\pi/3$

$z^2 = 2e^{i\pi/3} \Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{i((-\pi/3 + 2k\pi)/2)}$ $\quad k = 0, 1$ $\quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/6} \\ z_2 = \sqrt{2}\, e^{+i5\pi/6} \end{cases}$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i/2\right)$ $\quad z_2 = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}/2 - i/2\right)$

---

c) $\sqrt[4]{-1} = z$ $\quad z^4 = -1 = e^{i\pi}$ $\quad z = e^{i((\pi + 2k\pi)/4)}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

$z_1 = e^{i\pi/4}$, $\quad z_2 = e^{3\pi/4\, i}$ $\quad z_3 = e^{\frac{5\pi}{4} i}$ $\quad z_4 = e^{7\pi/4\, i}$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad z_2 = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ $\quad z_3 = \dots$ $\quad z_4 = \dots$

---

d) $\sqrt[3]{1+i} = z$ $\quad z^3 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z = \sqrt[6]{2}\; e^{i((\pi/4 + 2k\pi)/3)}$ $\quad k = 0, 1, 2$

$z_1 = \sqrt[6]{2}\; e^{i\pi/12}$ $\quad z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i9\pi/12}$ $\quad z_3 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{17\pi}{12}}$

---

۳) نشان دهید که

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

رابطه زیر را ثابت کنید

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{2\sin(\theta/2)}\ ; \qquad 0<\theta<2\pi$$

$$z=\cos\theta+i\sin\theta \qquad 1+\cos\theta+i\sin\theta+\cos 2\theta+i\sin 2\theta+\dots+\cos n\theta+i\sin n\theta=\frac{1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta=Re\left\{\frac{1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}\right\}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم

$$=\frac{(\overbrace{1-\cos(n+1)\theta}^{2\sin^2(n+1)\theta/2}-i\sin(n+1)\theta)\cdot(\overbrace{1-\cos\theta}^{2\sin^2\theta/2}+i\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\Rightarrow \text{I}$$

$$Re\{\text{I}\}=\frac{4\sin^2\frac{n+1}{2}\theta\sin^2\frac{\theta}{2}+\overbrace{\sin\theta}^{2\sin\theta/2\cos\theta/2}\overbrace{\sin(n+1)\theta}^{2\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n+1}{2}\theta}}{1+\cos^2\theta-2\cos\theta+\sin^2\theta}=\frac{''}{4(\sin^2\theta/2)}$$

$$=\frac{(4\sin(\frac{n+1}{2})\theta\sin\theta/2)(\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\theta/2+\cos\theta/2\cos\frac{n+1}{2}\theta)}{4\sin^2\theta/2}$$

$$=\frac{2(\sin\frac{n+1}{2}\theta)(\cos(\frac{n+1}{2}\theta-\theta/2))}{2\sin\theta/2}=\frac{\sin(\overset{(n+1/2)\theta}{\cancel{\frac{n+1}{2}\theta+\frac{n\theta}{2}}})+\sin(\overset{\theta/2}{\cancel{\frac{n+1}{2}\theta-\frac{n\theta}{2}}})}{2\sin\theta/2}$$

$$=1/2+\frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin\theta/2}$$

---

۲) نشان دهید اگر z یکی از ریشه‌های n ام واحد باشد و $z\neq 1$ آنگاه

$$1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=0$$

$$z^n=1 \Rightarrow z=\exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=1+\exp\left(\frac{i2\pi}{n}\right)+\exp\left(\frac{i4\pi}{n}\right)+\dots+\exp\left(i\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1(1-\exp((\frac{i2\pi}{n})n))}{1-\exp(\frac{i2\pi}{n})}=\frac{1-\exp(i2\pi)}{\alpha}=0$$

تمرینات صفحه ۱۶۴

۱- با توجه به تعریف مشتق نقاطی را که هر یک از توابع زیر دارای مشتق هستند یا دارای مشتق نیستند مشخص کنید؟

a) $f(z) = z|z|^2$

$z = x + iy \Rightarrow f(z) = x(x^2+y^2) + iy(x^2+y^2)$

$u = x(x^2+y^2) \quad , \quad v = y(x^2+y^2)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

① $x^2+y^2+2x^2 = x^2+y^2+2y^2 \Rightarrow x = y$

② $2xy = -2xy \Rightarrow x = y = 0$ ـــ در نقطه صفر مشتق دارد.

---

b) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \qquad z = x + iy$

$f(z) = x + y \qquad u = x + y \qquad v = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 1 = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 1 = 0$

۲- نقاطی را که هر یک از توابع زیر مشتق پذیر و تحلیلی و یا غیر تحلیلی هستند را مشخص کنید؟

a) $f(z) = z^3 \Rightarrow f(z) = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y + 3x(iy)^2 + (iy)^3 =$

$x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

$$u = x^3 - 3xy^2 \quad , \quad v = 3x^2y - y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow -6xy = -6xy$$

در تمام نقاط مشتق پذیر و تحلیلی است.

---

b) $f(z) = i|z|^4 = i(x^2+y^2)^2 = i(x^4+y^4+2x^2y^2)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Longrightarrow 4x^3 + 4xy^2 = 0 \quad x = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4y^3 + 4yx^2 \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow 4y^3 + 4yx^2 = 0 \quad y = 0$$

پس $f(z)$ در نقطهٔ $(0,0)$ تحلیلی است.

---

c) $f(z) = \dfrac{Re\, z}{Im\, z} = \dfrac{x}{y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{-x}{y^2} = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

---

d) $f(z) = (1+i)(x-y)^2 = \underbrace{(x-y)^2}_{u} + i\underbrace{(x-y)^2}_{v}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow 2(x-y) = -2(x-y) \Longrightarrow \boxed{x = y} \text{ تحلیلی است}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow -2(x-y) = -2(x-y)$$

e) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{x+iy}{x-iy} \times \frac{x+iy}{x+iy} = \frac{x^2+2ixy+i^2y^2}{x^2+y^2} =$

$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xyi}{x^2+y^2} \implies u = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad , \quad v = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2xy^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \implies \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2y(x^2+y^2) + 2x(2xy)}{(x^2+y^2)^2}$

[illegible]) $f(z) = Arg\, z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

$u = \tan^{-1} \frac{y}{x} \qquad v = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2} = \frac{-y/x^2}{x^2-y^2} = = = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1/x}{1+y^2/x^2} = \frac{1/x \cdot x^2}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = = = \frac{-\partial v}{\partial x}$

۳- آیا توابع زیر همساز هستند؟ در صورت همساز بودن، توابع مزدوج همساز آن ها را بیابید و تابع تحلیلی متناظر با آن ها را به صورت تابعی از z بنویسید؟

a) $u = e^{x}\cos y$

$$\begin{cases} u_x = e^{x}\cos y & u_{xx} = e^{x}\cos y \\ u_y = -e^{x}\sin y & u_{yy} = -e^{x}\cos y \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

همساز است.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

b) $u = (x^2 - y^2)^2$

مشابه مورد بالا

c) $u = x^3 - 3xy^2$

مشابه مورد (a) حل می شود.

d) $u = x^2 - y^2 - 2x + 3y$

$$\begin{cases} u_x = 2x - 2 & u_{xx} = 2 & u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u_y = -2y + 3 & u_{yy} = -2 & \Rightarrow 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

درمعادله لاپلاس صدق می‌کند پس تحلیلی هم‌ساز است

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2 \qquad \phi(x) = -3x$$

$$\phi'(x) = -3$$

$$v = 2xy - 2y + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \phi'(x)$$

$$\frac{-\partial v}{\partial x} = -2y + 3 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y - 3$$

$$v = 2xy - 2y - 3x$$

---

e) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow u_x = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$u_{xx} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (4x(x^2+y^2))(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$u_{xx} = \frac{-2x(x^4+y^4+2x^2y^2) - (4x^3+4xy^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$u_y = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow u_{yy} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2) - 2xy}{(x^2+y^2)^4}$$

$$u_{yy} = \frac{-2x(x^4+y^4+2x^2y^2) + 8xy^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} \neq 0$$

---

f) $u = 2xy \Rightarrow u_x = 2y,\ u_{xx} = 0 \Rightarrow u_y = 2x,\ u_{yy} = 0 \quad 0 + 0 = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \qquad v = y^2 + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\phi'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x \Rightarrow -2x = \phi'(x) \Rightarrow \phi(x) = -x^2 \Rightarrow v = y^2 - x^2$$

۴- a و b را طوری بیابید که هر یک از توابع زیر همساز باشند و مزدوج همساز آن ها را بیابید؟

a) $u = e^{ax}\cos by$

$$u_{xx} = a^2 e^{ax}\cos by \qquad u_{yy} = -b^2 e^{ax}\cos by$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow a^2 e^{ax}\cos by - b^2 e^{ax}\cos by = 0$$

$$\Rightarrow e^{ax}\cos by\,(a^2 - b^2) = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$$

به شرط مساوی بودن a و b، همساز است.

$$u = e^{ax}\cos ay \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = a e^{ax}\cos ay = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -a e^{ax}\sin ay$$

$$v(y) = e^{ax}\sin ay + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -a e^{ax}\cos ay - \phi'(x)$$

$$\phi(x) = -x \qquad -\phi'(x) = 1 \Rightarrow \phi'(x) = -1$$

$$\Rightarrow v(y) = e^{ax}\sin ay - x$$

---

b) $u = \cos ax \cosh by$

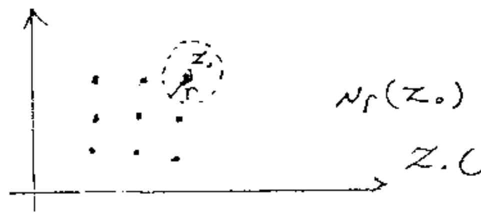
$$u_{xx} = -a^2 \cos ax \cosh by \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_{yy} = b^2 \cos ax \cosh by \rightarrow \cos ax \cosh by\,(b^2 - a^2) = 0$$

$b^2 = a^2 \Rightarrow b = \pm a$ همساز است

ادامه سؤال مانند قسمت الف می باشد

یک نقطه از تعداد متناهی هم ازکرد. چون تعداد اعضا متناهی از این قطعاً وجود دارد این همسایگی
از z_0 که شامل هیچ نقطه از D نباشد مثلاً فرض کنید ناحیه D به صورت زیر باشد:



حال هیچ نقطه از D نیست پس z_0
نقطه انباشتگی D نیست.

۷- تابع $f(z)=|z|^2$ در تمام صفحه مختلط پیوسته است.

حل: تابع $f(z)$ یک تابع چندجمله‌ای است وچون $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$
توابع چندجمله‌ای در تمامی نقاط پیوسته هستند پس $f(z)$ در تمامی صفحه مختلط $R\times R$ پیوسته است.

۸- هرگاه تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته بوده و $f(z_0)\neq 0$ آنگاه یک همسایگی از z_0
موجود است که به ازای هر z از این همسایگی $f(z)\neq 0$ است.

حل: $f(z)$ در z_0 پیوسته است پس $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ پس داریم:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \ni |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

وچون $f(z_0)$ صفر نیست می‌توان شعاع همسایگی آن را یعنی پیرامون $f(z_0)$ r را
انتخاب کرد: $r=\frac{1}{2}|f(z_0)|$ وچون پیوسته است پس حد موجود است:

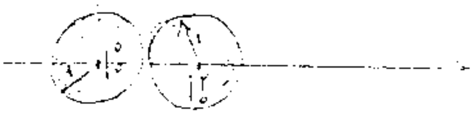
$$\exists \delta_1>0 \ni |z-z_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<r \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\frac{1}{2}|f(z_0)|$$

پس یک همسایگی $N_{\delta_1}(z_0)$ که نقش آن $f(z)$ در دایره‌ای به شعاع r و مرکز $f(z_0)$ می‌افتد وچون $f(z_0)\neq 0$ است در $N_{\delta_1}(z_0)$ برهان
[illegible] تمام است.

۵ - هرگاه D مجموعه همه z هایی باشد که $|z|<1$ یا $|z-2|<1$ آن گاه D همبند نیست.

حل: ناحیه D اجتماع دو دایره به شعاع 1 در مرکزهای $(0,0)$ و $(2,0)$ هست مانند شکل زیر: چون نقاط روی ناحیه D را شامل نمی‌شوند پس دو نقطه a و b وجود دارند که نتوان آن‌ها را با یک خط شکسته (تعریف همبند) به هم وصل کرد، پس همبند نیست.

۸



۶ - نقطه z_0 را یک نقطه انباشتگی مجموعه D نامند هرگاه هر همسایگی از z_0 شامل نقطه‌ای از D باشد با توجه به این تعریف نشان دهید:

الف) هر یک از نقاط یک مجموعه باز و همبند، نقطه انباشتگی آن است.

حل: 1) ناحیه D را یک مجموعه باز گویند هرگاه: $\exists \varepsilon>0 \ni N_\varepsilon(z_0) \subset D$

یعنی در مجموعه باز همواره پیرامون تمامی نقاط آن یک همسایگی به شعاع ε موجود است پس هر نقطه مجموعه D (باز) یک نقطه انباشتگی آن است

2) ناحیه D را همبند گویند هرگاه بتوان هر دو نقطه دلخواه را با خط شکسته به هم وصل کرد پس در ناحیه همبند هیچ نقطه منفرد (ایزوله) یافت نمی‌شود در نتیجه $N_\varepsilon(z_0)$ شامل حداقل یک نقطه است پس z_0 یک نقطه انباشتگی است

ب) یک مجموعه متناهی نمی‌تواند شامل نقطه انباشتگی باشد

مجموعه‌ای متناهی است که $\exists k \in \mathbb{N} \ni D \sim N_k$ یعنی بتوان آن مجموعه را با

۹_ هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی باشد آنگاه f یک تابع ثابت است اگر:

الف) $\bar{f}(z)$ نیز در D تحلیلی باشد.

ب) $|f|$ در D ثابت باشد.

ج) به ازای هر z از D مقدار f حقیقی باشد.

د) $Re f(z)$ عددی ثابت باشد.

حل: الف) راه اول

$$f(z) \text{ تحلیلی } \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ -u_y = v_x \end{cases}$$

$$f(z) = u + iv \Rightarrow \bar{f}(z) = u - iv \xrightarrow{\text{دارای تحلیلی بودن}} \begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = +v_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_y = -v_y \Rightarrow v_y = 0 \\ v_x = -v_x \Rightarrow v_x = 0 \end{cases} \text{ و } v \text{ ثابت است؛ } \begin{cases} u_x = -u_x \Rightarrow u_x = 0 \\ u_y = -u_y \Rightarrow u_y = 0 \end{cases} \text{ } u \text{ نیز ثابت است}$$

در تابع f اگر u و v ثابت باشند کل تابع نیز ثابت است.

راه دوم:

$$\left.\begin{array}{ll} u_x = v_y & (1) \\ v_x = -u_y & (2) \end{array}\right\} \bar{f}(z) = u - iv \text{ تحلیلی است} \Rightarrow \begin{cases} u_x = (-v)_y = -v_y & (1)' \\ u_y = -(-v)_x = +v_x & (2)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1),(1)' \Rightarrow u_x = 0 \\ (2),(2)' \Rightarrow u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = c_1 \text{ , } v(x,y) = c_2 \Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2$$

یعنی ثابت است.

حل ب) $|f| = c$ پس $u^2 + v^2 = c$ از طرفین رابطه یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} u_x + v_x = 0 \\ u_y + v_y = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{u_x = v_y \\ v_x = -u_y}]{\text{چون تحلیلی است}} \begin{cases} v_y - u_y = 0 \\ v_y + u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_y = 0 & (1) \\ v_y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x + v_x = 0 \\ -v_x + u_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} u_x = 0 & (1)' \\ v_x = 0 & (2)' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (1),(1)' : u(x,y) = c_1 \\ (2),(2)' : v(x,y) = c_2 \end{array} \Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2$$

ثابت است

حل ج) $\forall z \in D \Rightarrow f(z) = \text{Real} = k$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = k + i0$

$$\Rightarrow v(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \Rightarrow u_y = 0 \\ v_y = 0 \Rightarrow u_x = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = c \Rightarrow f(z) = c$$

یعنی ثابت است

حل د)

$$\operatorname{Re} f(z)=k \Rightarrow u(x,y)=k \Rightarrow \begin{cases} u_x=0 \Rightarrow v_y=0 \\ u_y=0 \Rightarrow v_x=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v(x,y)=c' \Rightarrow f(z)=k+ic'=c$ تابعی ثابت است

۱۰- هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی بوده و همواره $f'(z)=0$ باشد آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است

حل: $f(z)$ در D تحلیلی است پس توابع u و v پیوسته و دارای مشتق های جزئی پیوسته هستند و در شرایط کشی-ریمان صدق می کند

$$f'(z)=u_x+iv_x=0$$

$$\begin{cases} u_x=0 \Rightarrow v_y=0 \\ v_x=0 \Rightarrow u_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (1):\ u(x,y)=c_1 \\ (2):\ v(x,y)=c_2 \end{array} \Rightarrow f(z)=c_1+ic_2=c$$

تابعی ثابت است

۱۱- مشتق هریک از توابع زیر را در نقاطی که دارای مشتق هستند بیابید و نقاطی را که تحلیلی هستند مشخص کنید

a) $f(z)=\underbrace{|x|}_{u}+i\underbrace{|y|}_{v} \xrightarrow{\text{برای تحلیلی بودن}} \begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases} \qquad u_x=\frac{x}{|x|},\ u_y=0$

$\Rightarrow \frac{x}{|x|}=\frac{y}{|y|} \Rightarrow xy>0$

در ناحیه اول و سوم تحلیلی است.

$v_x=0,\ v_y=\frac{y}{|y|} \Rightarrow |x|=\frac{x|y|}{y}=|x| \Rightarrow f(z)=\frac{x|y|}{y}+i|y|$

$f'(z)=u_x+iv(x)=\frac{|y|}{y}+i\frac{y}{|y|}=\frac{y}{|y|}(1+i)$

b) $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{|z|}$

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy \Rightarrow f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$u_x = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$v_y = \frac{-\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \xrightarrow{\text{تساوی}} y^2 = -x^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 0$$

دایره‌ای به شعاع صفر به مرکز مبدأ مختصات در $z=0$ تحلیلی است و مقدار مشتق صفر است

---

c) $f(z) = (\underbrace{\operatorname{Re} z}_{u})^2 - i(\underbrace{\operatorname{Im} z}_{v})^2 \Rightarrow f(z) = x^2 + iy^2$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\operatorname{Re}\{z+\Delta z\}^2 - i\operatorname{Im}\{z+\Delta z\}^2 - x^2 + iy^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\cancel{x^2} + \Delta x^2 + x2x\Delta x - \cancel{iy^2} - i\Delta y^2 - i2y\Delta y - \cancel{x^2} + \cancel{iy^2}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$\begin{cases} \Delta x \to 0 : \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{-i\Delta y(\Delta y + 2y)}{i\Delta y} = -2y \\ \Delta y \to 0 : \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cancel{x^2} + \Delta x^2 + 2x\Delta x - \cancel{x^2}}{\Delta x} = 2x \end{cases} \Rightarrow 2x = -2y \Rightarrow x = -y$$

روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم تحلیلی است

$$x = -y \Rightarrow f(z) = y^2 - iy^2 \Rightarrow \begin{cases} u = y^2 \\ v = -y^2 \end{cases} \Rightarrow f'(z) = u_y - iv_y$$

$$\Rightarrow f'(z) = 2y + i2y \qquad \text{در } x=-y$$

---

d) $f(z) = \underbrace{|y|}_{u} - i\underbrace{|x|}_{v} \longrightarrow u_x = v_y \ , \ u_y = \dfrac{y}{|y|} \ , \ v_x = \dfrac{-x}{|x|}$

$$v_y = -v_x \Rightarrow \frac{y}{|y|} = \frac{x}{|x|} \Rightarrow xy > 0$$ در ربع اول و سوم تحلیلی است

$$|x| = \frac{x|y|}{y} \Rightarrow f(z) = |y| - i\frac{x|y|}{y}$$

$$f'(z) = u_y - iv_y \Rightarrow f'(z) = \frac{y}{|y|} + i\frac{|y|}{y} = \frac{|y|}{y}(1+i)$$

e) $f'(z) = \underbrace{\cos(x+y)}_{u} + i\underbrace{\cos(x-y)}_{v}$ / $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$$\begin{cases} u_x = -\sin(x+y) \\ v_y = \sin(x-y) \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y \Rightarrow -\sin(x+y) = \sin(x-y) \Rightarrow$$

$$\sin(x-y) + \sin(x+y) = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos y = 0$$

$$\begin{cases} u_y = -\sin(x+y) \\ -v_x = \sin(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & x = k\pi \\ \cos y = 0 & y = 2k\pi \pm \pi/2 \end{cases}$$

همانند بالایی است.

تابع در محل برخورد این دسته خطوط تحلیلی است.

در خود این خطوط نیز تحلیلی می باشد و مقدار مشتق در نقاط برخورد صفر است.

$x = k\pi \Rightarrow f(z) = \cos(k\pi+y) + i\cos(k\pi-y) \Rightarrow f'(z) = -\sin(k\pi+y)$

$u - i\sin(k\pi - y) \Big|_{y = 2k\pi \pm \pi/2} \Rightarrow f'(z) = 0$

---

f) $f(z) = \underbrace{\cos x}_{u} + i\underbrace{\cos y}_{v}$ $\begin{cases} u_x = -\sin x \\ v_y = -\sin y \end{cases} \Rightarrow \sin x = \sin y$

$f(z) = \cos(2k\pi + y) + i\cos y)$ در این نقاط تحلیلی است $\begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi + \pi - y \end{cases}$

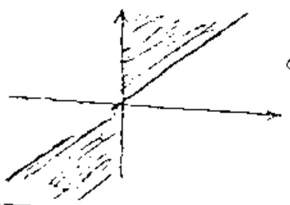
$f(z) = \cos y + i\cos y \Rightarrow f'(z) = -\sin y + i\sin y$

---

g) $f(z) = |x-y| + i|x+y|$: $u_x = v_y \Rightarrow \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x+y}{|x+y|} \Rightarrow$

$(x-y)(x+y) > 0 \xrightarrow[x<-y]{x>y} f(z) = x - y + i(x+y) \rightarrow u_x = 1$

$f'(z) = 1 + i$ تحلیلی $v_x = 1$

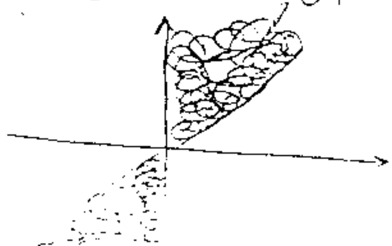


---

h) $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ $u_x = v_y \rightarrow \frac{2x(x^2-y^2)}{|x^2-y^2|} = \frac{2x^2 y}{|xy|}$

$\rightarrow \frac{x^2-y^2}{|x^2-y^2|} = \frac{xy}{|xy|} \rightarrow xy(x^4 - y^4) > 0$

در این نواحی



۱۰.۳. تمرینات: صفحات (۱۸۸ تا ۱۹۲)

۱- نقش هریک از منحنی های زیر را با نگاشت $w=z^2$ بیابید.

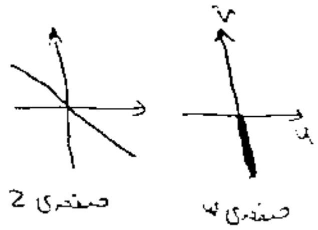
a) $y=-x$

$$w=x^2-y^2+2xyi$$

$u=x^2-y^2$

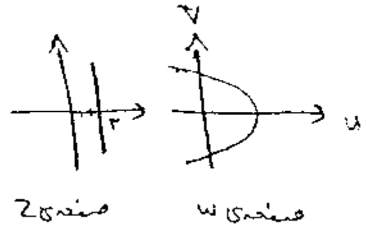
$v=2xy$

$$y=-x \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=-2x^2 \le 0 \end{cases} \qquad w=-2x^2 i$$



b) $x=3$

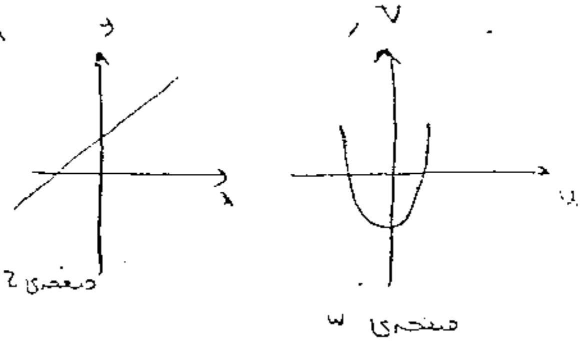
$$\begin{cases} u=3^2-y^2 \\ v=6y \end{cases} \rightarrow u=9-\frac{v^2}{36} \rightarrow u+\frac{v^2}{36}=9$$



c) $y=1+x$

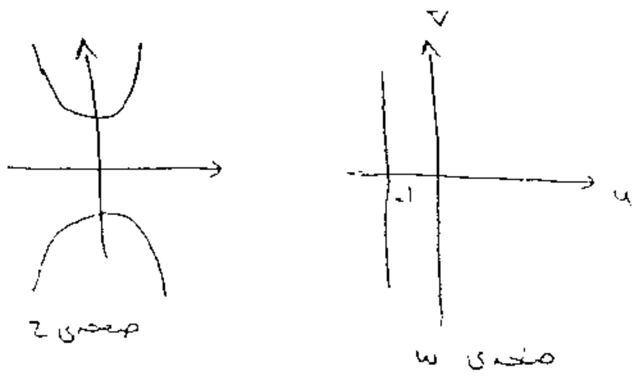
$$\begin{cases} u=x^2-(1+x)^2 \\ v=2x(1+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=2x+1 \\ v=2x^2+2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{u-1}{2} \Rightarrow v=\frac{u^2-1}{2}$$



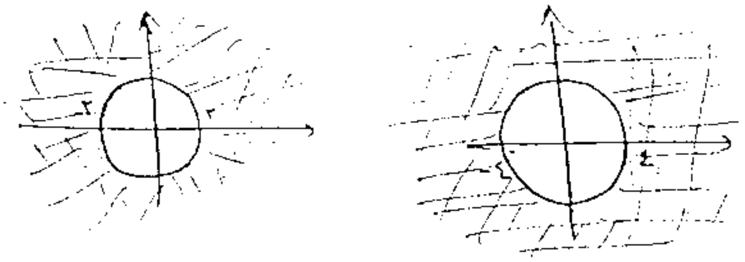
d) $y^2=x^2+1$

$$\begin{cases} u=x^2-x^2-1 \Rightarrow u=-1 \\ v=2x\sqrt{x^2+1} \end{cases}$$



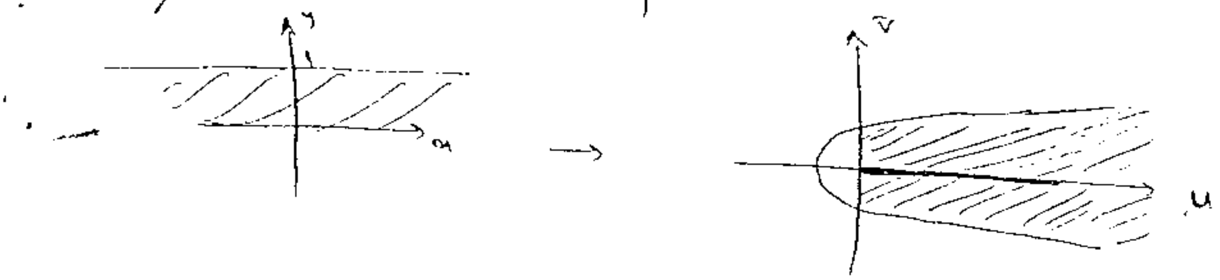
۲- نقش تصویر نواحی زیر را با نگاشت $w=z^2$ بیابید.

a) $|z|>2 \quad \longrightarrow \quad |w|=|z^2|=|z|^2>2^2 \longrightarrow |w|>4$



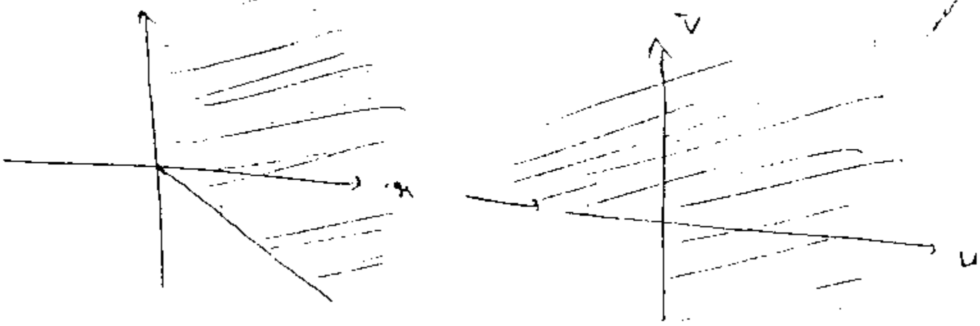
b) $0<y<1 \qquad z^2=\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases} \qquad \text{if } y=0 \Rightarrow \begin{cases} u=x^2 \\ v=0 \end{cases}$

$\text{if } y=1 \Rightarrow \begin{cases} u=x^2-1 \\ v=2x \end{cases} \Longrightarrow u=\dfrac{v^2}{4}-1$



c) $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2} \longrightarrow z=re^{i\theta} \longrightarrow z^2=r^2e^{2\theta i}$

$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2}<2\theta<\pi$



۳ـ نقش هر یک از منحنی‌های زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید:

a) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow \begin{array}{l}\arg z=-\arg w\\ |w|=\frac{1}{|z|}\end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4}<\arg w<0$$

b) $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{4}$

c) $0<x<1 \qquad 0<y<1$

$$w=\frac{1}{z} \to z=\frac{1}{w}=\frac{u-iv}{u^2+v^2} \quad \left| \begin{array}{l} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=-\frac{v}{u^2+v^2}\end{array}\right.$$

$x=0 \longrightarrow u=0$

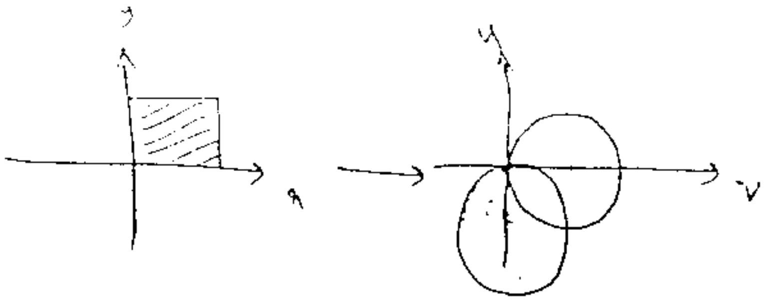
$$x=1 \Rightarrow u^2+v^2=u \to \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4} \to \left|u-\frac{1}{2}+iv\right|=\frac{1}{2}$$

$$\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

$y=0 \longrightarrow v=0$

$$y=1 \longrightarrow 1=-\frac{v}{u^2+v^2} \to u^2+v^2+v=0 \to u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\left|u+iv+\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2} \Rightarrow \left|w+\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$$



۴- نقش هر یک از انواع زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید:

a) $|z+1|=1 \longrightarrow \left|\frac{1}{w}+1\right|=1 \longrightarrow \frac{|1+w|}{|w|}=1 \longrightarrow |1+w|=|w|$

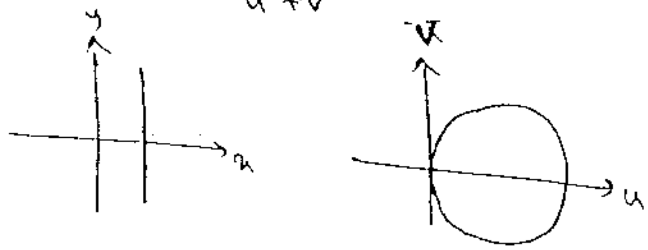
$|(u+1+iv)|^{۲}=|u+iv|^{۲} \longrightarrow (u+1)^{۲}+v^{۲}=u^{۲}+v^{۲} \longrightarrow u=-\frac{1}{۲}$

b) $y=x-1 \qquad z=\frac{1}{w} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^{۲}+v^{۲}} \\ y=\dfrac{-v}{u^{۲}+v^{۲}} \end{cases} \longrightarrow y=x-1$

$\Rightarrow \frac{u}{u^{۲}+v^{۲}}+\frac{v}{u^{۲}+v^{۲}}=1 \Rightarrow u+v=u^{۲}+v^{۲}$

$\Rightarrow (u-\frac{1}{۲})^{۲}+(v+\frac{1}{۲})^{۲}=(\frac{1}{\sqrt{۲}})^{۲}$

c) $x=1 \Rightarrow 1=\frac{u}{u^{۲}+v^{۲}} \rightarrow u^{۲}+v^{۲}=u \Rightarrow (u-\frac{1}{۲})^{۲}+v^{۲}=\frac{1}{۴}$



d) $|z-۲i|=۲ \qquad \left|\frac{1}{w}-۲i\right|=۲$

$\frac{|1-۲wi|}{|w|}=۲ \rightarrow |1-۲iu+۳v|=۲|w|$

$\rightarrow (1+۲v)^{۲}+(۲u)^{۲}=۹(u^{۲}+v^{۲}) \rightarrow u^{۲}=-\frac{1}{۹} \Rightarrow u=\pm\frac{1}{۳}i$

۵- نقش ناحیه $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ را با هریک از نگاشت‌های زیر بیابید:

a) $w = iz \longrightarrow w = e^{i\frac{\pi}{2}} r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{3\pi}{4}$

b) $w = z^2 \longrightarrow w = r^2 e^{2i\theta} \longrightarrow 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$

c) $w = iz^2 \longrightarrow w = e^{i\frac{\pi}{2}} r^2 e^{2i\theta} \longrightarrow \frac{\pi}{2} < \arg w < \pi$

d) $w = -iz^2 \longrightarrow w = r^2 e^{2i\theta} e^{-\frac{\pi}{2}i} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg w < 0$

e) $w = r^3 e^{3\theta} = z^3 \longrightarrow 0 < \arg w < \frac{3\pi}{4}$

۶- تبدیل موبیوسی بیابید که

a- سه نقطه‌ی ۰ و ۱ و ۲ (z_1, z_2, z_3) را به روی ۱ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ (w_1, w_2, w_3) بنگارد.

$$\frac{w-1}{w-\frac{1}{3}} \times \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{z-0}{z-2} \times \frac{1-2}{1}$$

b) i- و ۰ و i را به روی ۰ و ۱- و ∞ بنگارد.

$$\frac{w-0}{w-\infty} \times \frac{-1-\infty}{-1-0} = \frac{z+i}{z-i} \times \frac{0-i}{0+i}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{w-\infty}{-1-\infty}\right) \frac{-1}{w} = -\frac{z+i}{z-i} \Longrightarrow (1)\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{z+i}{z-i} \Rightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$$

c) $z=0$ نقطه ثابت آن باشد.

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = z_1$$

$$\text{if } (z_1 = 0) \Rightarrow \frac{a\times 0+b}{c\times 0+d} = 0 \Rightarrow \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow w = \frac{az}{cz+d}$$

d) ناحیه‌ی $|z| \leq 1$ را بروی $|w| \leq 1$ طوری بنگارید که $z = \frac{i}{4}$ بروی $w = 0$ نگاشته شود.

$$\frac{w-1}{w-0} \times \frac{-1-0}{-1-1} = \frac{z+1}{z-\frac{i}{4}} \times \frac{1-\frac{i}{4}}{1+1} = \frac{(z-1)i}{z-i}$$

e) ناحیه‌ی $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ را بروی درون یک $|w|=1$ بنگارید.

مانند مثال حل شده در صفحه‌ی ۱۷۶ کتاب دکتر شیدفر داریم:

$w_1 = z^4 \longrightarrow$ ناحیه را به $\mathrm{Im}(z) > 0$ تبدیل می‌کند

$$w = e^{i\alpha} \frac{z^4 - z_0}{z^4 - \bar{z}_0} \; ; \; \mathrm{Im}(z_0) > 0$$

f) نقاط i و $-i$ نقاط ثابت آن باشند.

حل *

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

$z_1 = i \Rightarrow ai + b = i(ci + d) = -c + id$ HX1

$z_2 = -i \Rightarrow -ai + b = -i(-ci + d) = -c - di$ XH2

$HX1 + XH2 \Rightarrow b = -c \Rightarrow c = -b$

$HX1 - XH2 \Rightarrow ai = di \Rightarrow d = a$

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{-bz+a} = \frac{b+az}{a-bz} \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

۱۰- ثابت کنید که اگر مبدأ مختصات نقطه ثابت یک تبدیل دوخطی باشد آنگاه آن تبدیل را می‌توان به صورت $w=\frac{z}{cz+d}$ نوشت

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

* اثبات:

$$f(z)=z \underset{z=0}{\Rightarrow} \frac{b}{d}=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow w=\frac{az}{cz+d}$$

$$a\neq 0 \Rightarrow w=\frac{z}{\frac{c}{a}z+\frac{d}{a}}=\frac{z}{c'z+d'}$$

۱۱- نشان دهید با تبدیل $w=\frac{z-2}{z}$ قرص $|z-1|\leq 1$ به روی نیم صفحه $\operatorname{Re} w\leq 0$ نگاشته می‌شود:

$$w=\frac{z-2}{z}=1-\frac{2}{z}$$

* اثبات:

نگاشت w ابتدا $|z-1|\leq 1$ را تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ تصویر کرده و سپس با تبدیل $2e^{i\pi}$ دو برابر کرده و به اندازه π رادیان دوران می‌دهد و در نهایت به اندازه‌ی $1+0i$ جابجا می‌کند.

$$w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{w} \qquad x=\frac{u}{u^2+v^2} \quad , \quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

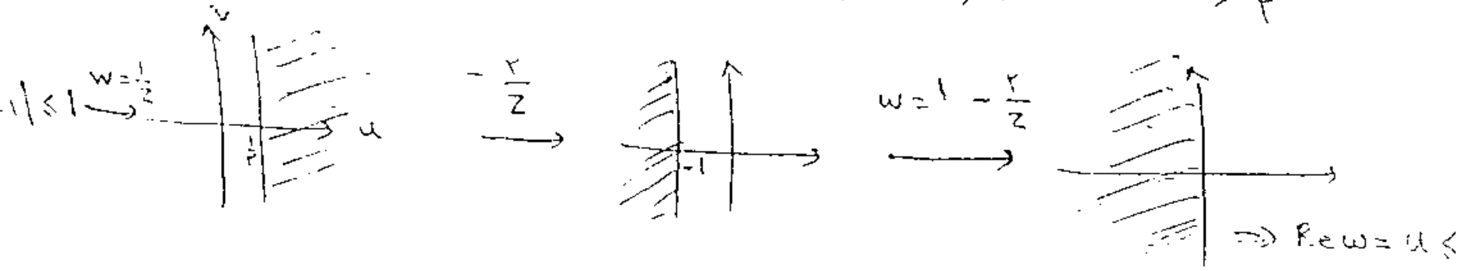
$$|z-1|\leq 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2\leq 1$$

$$(x-1)=\frac{u-u^2-v^2}{u^2+v^2} \Rightarrow (x-1)^2+y^2=\left(\frac{u-u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\leq 1$$

$$\Rightarrow (u-u^2-v^2)^2+v^2\leq (u^2+v^2)^2$$

بعد از ساده‌سازی $\Rightarrow$ $u^2-2u^3-2uv^2+v^2\leq 0 \Rightarrow u^2(1-2u)+v^2(1-2u)\leq 0$

$$\Rightarrow (u^2+v^2)(1-2u)\leq 0 \Rightarrow (1-2u)\leq 0 \Rightarrow u\geq \frac{1}{2}$$

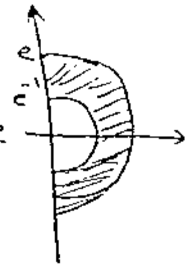


۱۲- نقش ناحیه‌های زیر را با تبدیل $w=e^{z}$ بیابید:

a) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ و $-1 < x < 1$

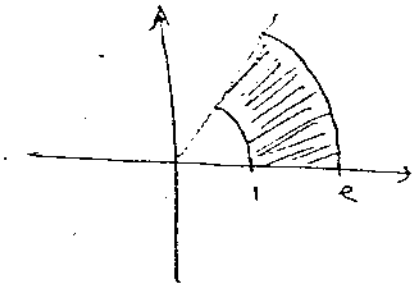
$w = e^{x} e^{iy}$ $\quad \rho = e^{x}$ و $-1 < x < 1 \to e^{-1} < \rho < e$

زاویه $\varphi = y$ $\quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$



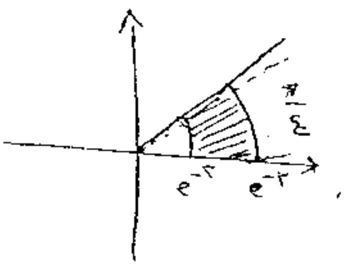
b) $0 < x < 2 \Rightarrow 1 < \rho < e^{2}$

$0 < y < 1 \to 0 < \varphi < 1$



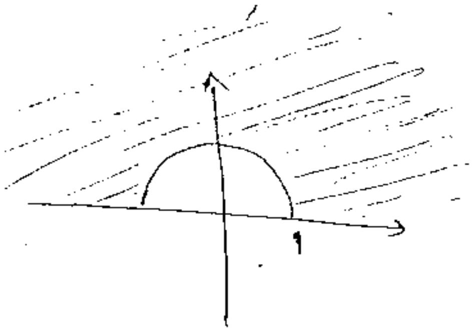
c) $-3 < x < -2 \Rightarrow e^{-3} < \rho < e^{-2}$

$0 < \quad < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$



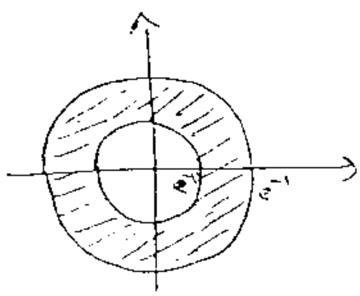
d) $x \geq 0 \Rightarrow \rho \geq 1$

$0 < y < \pi \Rightarrow 0 < \varphi < \pi$



e) $-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow e^{-1} < \rho < e^{3}$

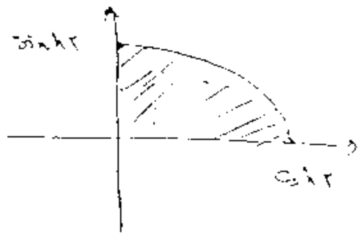
$-\pi < y < \pi \Rightarrow -\pi < \varphi < \pi$



۱۳ـ تصاویر نواحی زیر را با نگاشت $w=\sin z$ بیابید.

$W=\sin z \rightarrow w=\sin x\cosh y+i\sinh y\cos x$

$u=\sin x\cosh y \qquad v=\sinh y\cos x$



$y=0 \;,\; 0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<u<1 \;,\; v=0$

$y=2 \;,\; 0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 2}+\frac{v^2}{\sinh^2 2}=1$

$x=\frac{\pi}{2} \;,\; 0<y<2 \Rightarrow 0<u<\cosh 2 \;,\; v=0$

$x=0 \;,\; 0<y<2 \Rightarrow u=0 \;,\; v=\sinh y \Rightarrow 0<v<\sinh 2$

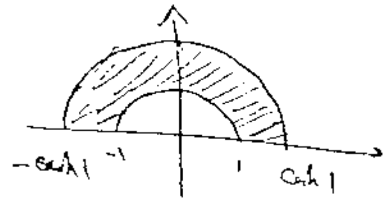
b) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \qquad 0<y<1$

$y=0 \;,\; -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -1<u<1 \;,\; v=0$

$y=1 \;,\; -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} u=\sin x\cosh 1 \\ v=\sinh 1\cos x \end{array} \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1}+\frac{v^2}{\sinh^2 1}=1$

$x=\frac{\pi}{2} \;,\; 0<y<1 \Rightarrow 1<u<\cosh 1 \;,\; v=0$

$x=-\frac{\pi}{2} \;,\; 0<y<1 \Rightarrow -1<u<-\cosh 1 \;,\; v=0$



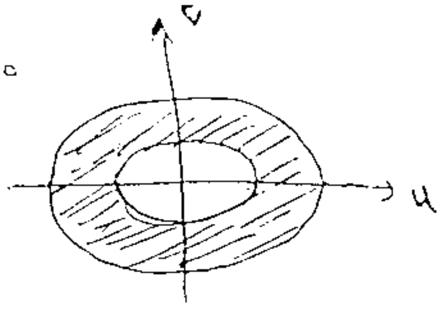
c) $0<x<2\pi \qquad 1<y<2$

$y=1 \;,\; 0<x<2\pi \Rightarrow u=\sin x\cosh 1 \;,\; v=\sinh 1\cos x \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1}+\frac{v^2}{\sinh^2 1}=1$

$y=2 \;,\; 0<x<2\pi \Rightarrow u=\sin x\cosh 2 \;,\; v=\sinh 2\cos x \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 2}+\frac{v^2}{\sinh^2 2}=1$

$x=0 \;,\; 1<y<2 \Rightarrow u=0 \;,\; \sinh 1<v<\sinh 2$

$x=2\pi \;,\; 1<y<2 \Rightarrow \sinh 1<v<\sinh 2 \;,\; u=0$



۱۴- نشان دهید که $w=\sin z$ خط $x=c$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$ را به طور یک به یک بروی شاخه‌ی سمت راست هذلولی می‌نگارد.

* اثبات:

$$u=\sin x\cosh y \qquad v=\cos x\sinh y$$

$$x=c \Rightarrow u=\sin c\cosh y \ , \ v=\cos c\sinh y$$

$$\frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

چون $\sin c>0$ و $\cosh y>0$ پس $u>0$ و خط $x=c$ بروی شاخه‌ی سمت راست نگاشته می‌شود.

۱۵- نشان دهید تحت تبدیل $w=\sin z$ نقش مرز ناحیه $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le y\le 1$ پاره‌خط‌های $A'D'$ و $A'E'$ و منحنی $E'D'$ است که در آن $E'D'$ قسمتی از یک بیضی است.

$$u=\sin x\cosh y \qquad v=\cos x\sinh y$$

خط $y=0 \Rightarrow u=\sin x \ , \ v=0$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \ , \ v=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1 \quad v=0 \end{cases}$$

خط $x=0 \Rightarrow u=0 \ , \ v=\sinh y$

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow u=0 \ , \ v=0 \\ y=1 \Rightarrow u=0 \ , \ v=\sinh 1 \end{cases}$$

خط $y=1 \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1}+\frac{v^2}{\sinh^2 1}=1$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \quad v=\sinh 1 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\cosh 1 \quad v=0 \end{cases}$$

که در معادله‌ی بیضی صادق است

۱۴- نشان دهید نگاشت $w=\cosh z$ پاره‌خط $z=iy$ $(0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2})$ را به روی پاره‌خط $0\leqslant u\leqslant 1$ و $v=0$ می‌نگارد.

* جواب:

$$w=\cosh z=\cosh iy=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}=\cos y$$

$$w=\cos y+i0 \Rightarrow u=\cos y \quad , v=0$$

$$0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0\leqslant u\leqslant 1$$

---

* صورت درست سؤال بدین ترتیب است:

۱۷. نشان دهید که تبدیل $w=\sin^2 z$ ناحیه $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ و $y\le 0$ را به روی ناحیه $v\le 0$ می‌نگارد.

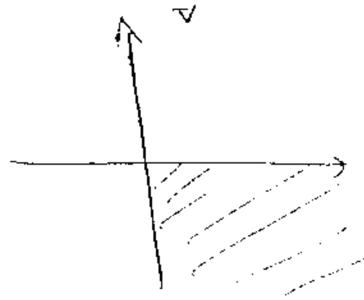
* این نگاشت را ترکیب دو نگاشت مقابل می‌گیریم: $w_1=\sin z \quad , \quad w_2=w_1^2$

$$\begin{matrix} 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ y\le 0 \end{matrix} \Rightarrow w_1=\sin z \Rightarrow \begin{matrix} u=\sin x\cosh y \\ v=\cos x\sinh y \end{matrix}$$

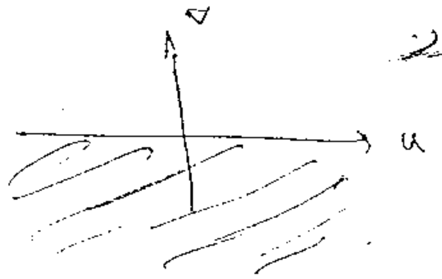
$$\begin{matrix} 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ y\le 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sin x\ge 0 \\ \cosh y>0 \end{matrix} \Rightarrow u\ge 0 \ , \ v\le 0$$

$$0<x=c<\frac{\pi}{2} \xrightarrow{w_1=\sin z} \frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

هذلولی‌های با مجانب $v=\pm\cot c\, u$ که تمام ناحیه $\begin{matrix} u\ge 0 \\ v\le 0\end{matrix}$ را می‌پوشانند. تحت $w=w_1^2$ زاویه ۲ برابر می‌شوند.

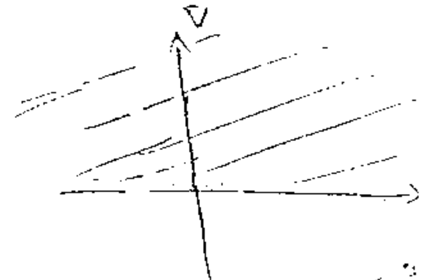


$\xrightarrow{w=w_1^2}$



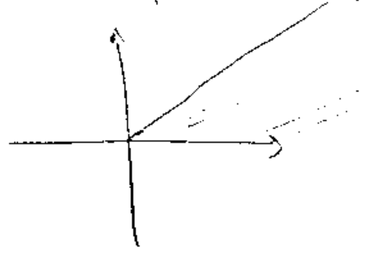
۱۸- نشان دهید که تحت تبدیل $w=(\sin z)^{\frac{1}{4}}$ نوار نیمه متناهی $-\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}$ و $y\ge 0$ به روی قسمتی از ربع اول که زیر خط $u=v$ واقع است نگاشته می‌شود. ترانه‌اش را مشخص کنید.

$w_1=\sin z \quad , \quad w_2=w=w_1^{\frac{1}{4}}$



$$\begin{matrix} u=\sin x\cosh y \\ v=\cos x\sinh y \end{matrix} \xrightarrow[y\ge 0]{-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}} \begin{matrix} -\infty<u<+\infty \\ v\ge 0 \end{matrix}$$

$$w=w_1^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \theta \to \theta/4$$



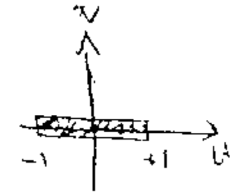
۱۹- نقش هریک از نواحی زیر را با تبدیل $w=\cos z$ بیابید.

a) $y \geq 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y = u+iv$$

$$y \geq 0 \Rightarrow \cosh y \geq 1 \ , \ \sinh y \geq 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \sin x \leq 1$$



$u = \cos x \cosh y \qquad$ if $y=0 \Rightarrow u=\cos x \ , \ v=0 \Rightarrow$

$v = \sin x \sinh y \qquad$ if $y \neq 0 \Rightarrow y = c > 0 \Rightarrow u = \cos x \cosh c$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v = \sin x \sinh c$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1 \qquad \forall x \in [0,\pi]$$

* نقش حاصل یک بیضی از خروج از مرکز $e=\frac{1}{\cosh c}$ است که با افزایش c کوچک شده و به خط متمایل می شود.

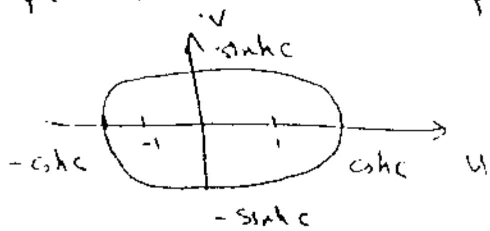
b) $\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

$$\begin{matrix} u = \cos x \cosh y \\ v = \sin x \sinh y \end{matrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \leq c \leq 1]{y=c} \frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{1}{\cosh c}$$

$$\frac{1}{2} \leq c \leq 1 \Rightarrow \cosh \frac{1}{2} \leq \cosh c \leq \cosh 1 \Rightarrow \cosh 1 \leq \frac{1}{\cosh c} \leq \cosh \frac{1}{2}$$

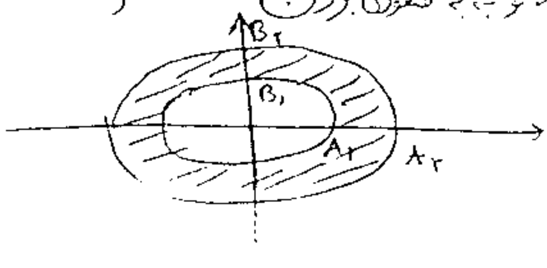
$$\forall c \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$



که با توجه به صعودی بودن $\sinh x$, $\cosh x$ داریم

$A_1 \begin{vmatrix} \cosh \frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad B_1 = \begin{vmatrix} \sinh \frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix}$

$A_2 = \begin{vmatrix} \cosh 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} \sinh 1 \\ 0 \end{vmatrix}$



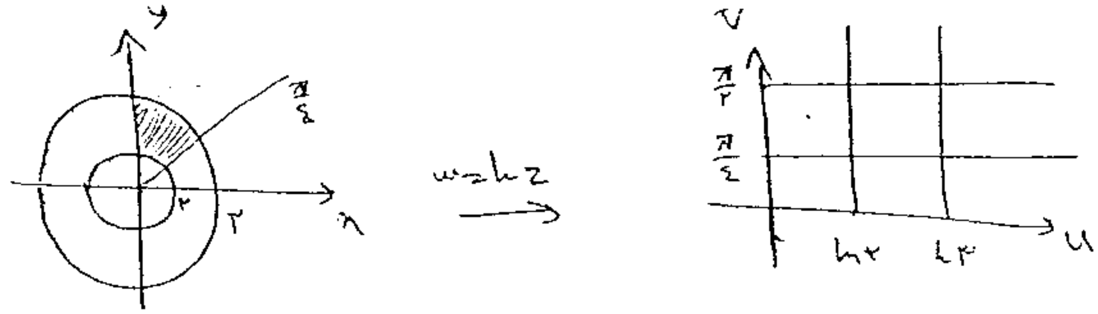
۲۰- نقش ناحیه ی $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $2 \le |z| \le 3$ را با تبدیل $w = \ln z$ بیابید.

* جواب: شاخه اصلی $\ln$ $\qquad w = \ln z = \ln|z| + i\theta$

$$2 \le |z| \le 3 \Rightarrow \ln 2 \le \ln|z| \le \ln 3$$

$$\ln 2 \le u \le \ln 3$$

$$v = \theta \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$



۲۱- با استفاده از صورت قطبی z نشان دهید که تبدیل $w = z + \frac{1}{z}$ هر دو نیمه بالایی و پایینی دایره $|z|=1$ را به روی پاره خط $-2 \le u \le 2$ و $v = 0$ می نگارد.

* جواب: نقاط دایره $|z|=1$ را با: $\qquad z = e^{i\theta}$

$$w = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta + \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = 2\cos\theta = u + iv$$

$$v = 0$$

$$u = 2\cos\theta \Rightarrow -1 \le \cos\theta \le 1 \Rightarrow -2 \le u \le 2$$

۲۰- نشان دهید

a) $\cos\bar{z} = \overline{\cos z}$

$$\cos\bar{z} = \cos(x - iy) = \cos x \cos iy + \sin x \sin iy = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$$

$$\overline{\cos z} = \bar{w} \quad , \quad w = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\bar{w} = \overline{\cos z} = \cosh y \cos x + i \sin x \sinh y = \cos\bar{z}$$

$$\sin\bar{z} = \overline{\sin z} \qquad \sin\bar{z} = \sin(x - iy) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

$$= \overline{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y} = \overline{\sin z}$$

b) $|\sinh y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \leqslant \cosh^2 y \cos^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y$$

$$\leqslant \cosh^2 y (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cosh^2 y \quad (\sinh y \leqslant \cosh y \text{ همواره})$$

$$|\cos z| \leqslant |\cosh y| = \cosh y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \geqslant \cos^2 x \sinh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \sinh^2 y$$

$$|\cos z| \geqslant \sinh y \Rightarrow |\sinh y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y$$

c) $|\cosh z| \leqslant \cosh x$

$$|\cosh z| = \frac{1}{2}|e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}| \leqslant \frac{1}{2}|e^x e^{iy}| + \frac{1}{2}|e^{-x} e^{-iy}|$$

$$|e^{iy}| \leqslant 1 \Rightarrow |\cosh z| \leqslant \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \cosh x$$

d) $\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$

$\sin^{-1} z = w \Rightarrow z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \dfrac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}}$

$e^{2iw} - 1 = 2ize^{iw} \quad , \; e^{iw} = a$

$a^2 - 1 = 2iza \Rightarrow a^2 - 2iaz - 1 = 0 \qquad a = iz \pm \sqrt{1-z^2} \Rightarrow a = iz + \sqrt{1-z^2} = e^{iw}$

چون e^{iw} مقدار لگاریتم تابع جزء ساتی لذا مقدار منفی نادرست است.

$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2} \Rightarrow iw = \ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \Rightarrow w = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$

e) $\cos^{-1} z = w \Rightarrow z = \cos w = \dfrac{e^{2iw} + 1}{2ie^{iw}}$

$e^{2iw} + 1 - 2ze^{iw} = a^2 + 1 - 2za = 0 \Rightarrow a = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = e^{iw}$

$\Rightarrow w = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

f) $\cosh^{-1} z = w \Rightarrow z = \cosh w = \dfrac{e^{2w} + 1}{2e^{w}}$

$a^2 + 1 - 2az = 0 \Rightarrow a = z \pm \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow w = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

g) $\tan^{-1} z = w \Rightarrow z = \tan w = \dfrac{\sin w}{\cos w} = \dfrac{(e^{iw} - e^{-iw})/2i}{(e^{iw} + e^{-iw})/2}$

$\Rightarrow z = \dfrac{1}{i} \dfrac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = -i \dfrac{(e^{iw})^2 - 1}{(e^{iw})^2 + 1} \Rightarrow \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2} = \dfrac{z}{i} = -iz$

$a^2 = \dfrac{1 + iz}{1 - iz} \Rightarrow a = \sqrt{\dfrac{i - z^2}{i + z^2}} = e^{iw}$

$iw = \ln\left(\dfrac{i - z^2}{i + z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{i - z^2}{i + z^2}$ *(کتاب اشتباه محاسبه کرده)

۲۳- کلیه ریشه‌های معادله $\sin z = \cosh 4$ را بیابید.

* حل مسأله:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x = \cosh 4 + i0$$

$$\cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{or} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin x \cdot \cosh y = \cosh 4$$

$$\text{if } y = 0 \Rightarrow \sin x = \cosh 4 \quad \times \quad \Rightarrow y \neq 0$$

$$\text{if } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \text{ فرد} \Rightarrow -\cosh y = \cosh 4 \quad \times$$

$$\text{if } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \text{ زوج} \Rightarrow \cosh y = \cosh 4$$

با توجه به زوج بودن $\cosh y$ داریم:

$$y = -4, 4 \Rightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \text{ زوج} \\ y = -4, 4 \end{cases}$$

۲۴- کلیه ریشه‌های معادله $\cos z = 2$ را بیابید.

$$\cos z = 2 \qquad \cos(x+iy)$$

* حل:

$$\cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh x + i \sin x \sinh y = 2$$

$$\sin x \sinh y = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi \quad (\mathrm{I}) \\ \sinh y = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow \cos x = 2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\cos x \cosh y = 2$$

$$(\mathrm{I}) \longrightarrow \begin{array}{l} x = 2n\pi \longrightarrow \cosh y = -2 \quad \text{غ ق ق} \\ x = (2n-1)\pi \longrightarrow \cosh y = 2 \quad y = \cosh^{-1} 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = (2n-1)\pi \\ y = \cosh^{-1} 2 \end{array}\right\}$$ ← مجموعه جواب به صورت

۲۵ـ نشان دهید $\overline{\cos(iz)} = \cos(i\bar{z})$ اگر و فقط اگر $z = n\pi i$.

* جواب

① $\cos iz = \cos i(x+iy) = \cos(-y+ix) = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$

② $\cos i\bar{z} = \cos(\overline{-y+ix}) = \cos(-y-ix) = \cos y \cosh x - i \sin y \sinh x$

از ① و ② مسئله فوق حاصل می‌شود.

* نکته: $\cosh x$, $\cos x$ توابعی زوج و $\sin x$, $\sinh x$ توابعی فرد هستند.

۲۶ـ کلیه ریشه‌های معادله $\sinh z = i$ را بیابید.

* جواب:

$\sinh z = i$

$\sinh(x+iy) = \sinh x \cosh iy + \sinh iy \cosh x = \sinh x \cos y + i \sin y \cosh x = i$

$$\sinh x . \cos y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{or} \\ y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\sin y . \cosh x = 1$

if $x = 0 \Rightarrow \sin y = 1 \Rightarrow y = (4k+1)\frac{\pi}{2}$; زوج k

if $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ فرد $k \Rightarrow \cosh x = -1$ ✗

if $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, زوج $k \Rightarrow \cosh x = 1 \Rightarrow x = -1, 1$

۲۷ـ ثابت کنید که در $z = re^{i\theta}$ ، $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $r > 0$

آنگاه $\ln z^2 = 2\ln z$

* جواب

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta} \Rightarrow -\pi < 2\theta < \pi$$

شاخه اصلی $\ln z^2 = \ln|z|^2 + i2\theta = 2(\ln|z| + i\theta) = 2\ln z$

* تحت نگاشت $w = z^2$ ناحیه $r > 0$ ، $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ تمامی صفحه مختلط را پوشش می‌دهد، حال اگر $-\pi < \theta < \pi$ باشد صفحه مختلط دوبار پوشیده می‌شود، z^2 ما را از حالت تابع بودن خارج می‌کند.

۲۸ـ نشان دهید تابع $\frac{\ln(z-i)}{z^2+i}$ همه جا بجز روی نیم خط $y=1$ و $x \le 0$ تحلیلی است.

راه حل اول: شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن مشتق‌پذیر بودن است.

$$z = x+iy \Rightarrow z-i = x+i(y-1)$$

$$z^2+i = (x^2-y^2) + i(2xy+1)$$

$$\ln(z-i) = \ln|z-i| + i\tan^{-1}\frac{y-1}{x} = \ln[x^2+(y-1)^2]^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}\frac{y-1}{x}$$

$$\frac{\ln(z-i)}{z^2+i} = P(x,y) + i\,q(x,y)$$ حال از شرایط کشی ـ ریمان استفاده می‌کنیم

راه حل دوم: با فرض تحلیلی بودن مشتق آن را داریم.

$$f(z) = \frac{\ln(z-i)}{z^2+i}, \quad f'(z) = \frac{\frac{z^2+i}{z-i} - 2z\ln(z-i)}{(z^2+i)^2}$$

نقاطی که $f'(z)$ وجود ندارند:

1) if $y=1$, $x \le 0 \Rightarrow z-i = x+i(y-1) = x$

آنگاه $\ln$ ما منفی خواهد بود پس در این ناحیه $f'(z)$ موجود نیست و تحلیلی نمی‌باشد.

ادامه ـ

۲) حال ریشه مخرج را بررسی می‌کنیم

$$z^2+i = 0 \Rightarrow z^2 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow r = 1, \ \theta = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

z_1 روی نیم‌خط واقع است ولی z_2 واقع نیست پس تمامی

$R^2 - \{(x,y) \ldots\}$

۲۹- هریک از عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید

* حل :

a. $(1+i)^{i} \longrightarrow 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\longrightarrow \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{i\ln\sqrt{2}}\, e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}\right)$$

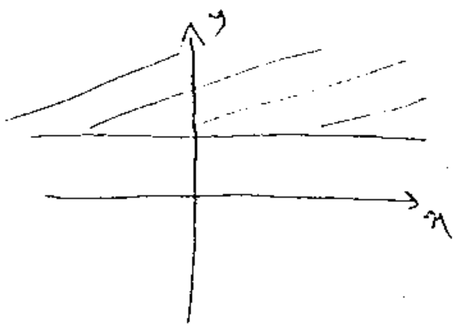
b. $(1-i)^{4i} \longrightarrow 1-i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}}$

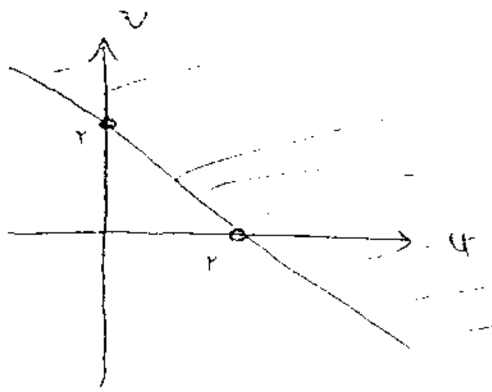
$$(1-i)^{4i} = 4^{i} e^{\pi} = e^{i\ln 4}\, e^{\pi} = e^{\pi}\left(\cos\ln 4 + i\sin\ln 4\right)$$

۳۰- نقش ناحیه $y>1$ را با تبدیل $w=(1-i)z$ بیابید.

$$w = (1-i)(x+iy) = x+y+i(-x+y) \qquad u = x+y,\quad v = -x+y$$

$$\longrightarrow y = \frac{u+v}{2} \xrightarrow{y>1} \frac{u+v}{2} > 1 \longrightarrow u+v > 2$$





۳۱ـ نقش هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

$$f(z) = w = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow z = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$\rightarrow x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad , \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \quad : \quad u^2 - v^2 = (u^2+v^2)^2$$

۳۲ـ نشان دهید که ترکیب دو تبدیل خطی یک تبدیل خطی است.

* حل: تابع تبدیل هر تبدیل خطی به صورت $w = a_k z + b_k$ است که در آن a_k و b_k اعداد مختلط باشند.

$$\begin{array}{l} w_1 = a_1 z + b_1 \\ w_2 = a_2 z + b_2 \end{array} \xrightarrow{\text{ترکیب}} w = w_1 + w_2 = (a_1 + b_1) z + b_1 + b_2 = az + b$$

تبدیل خطی

۳۴- تبدیل $w = \cosh z$ را برحسب نگاشتهای زیر بیان کنید.

$$Z = e^{z} \quad , \quad w = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$$

حل:

$$w = \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{z} + \frac{1}{e^{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2}W = \frac{W}{2} \;;$$

*۱- مطلوب است محاسبه $\int_c f(z)\,dz$ در آن

a) $f(z)=\operatorname{Re} z$ ، C منحنی $y=x^2$ از $z=0$ تا $z=1+i$

*حل: $z=x+iy$ $\quad f(z)=\operatorname{Re} z = x \Rightarrow u=x \quad v=0$

$y=x^2 \Rightarrow dy=2x\,dx$

$$\int_c f(z)\,dz=\int_0^1 x\,dx - 0\times dy + i\int_0^1 x\,dy + 0\times dx =$$

$$\int_0^1 x\,dx + i\int_0^1 2x^2\,dx = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}i$$

b) $f(z)=|z|^2$ ، C دایره واحد.

*حل: $f(z)=x^2+y^2 \quad z=e^{i\theta} \quad dz=ie^{i\theta}\,d\theta$

$$\int_c f(z)\,dz=\int_0^{2\pi} 1\times ie^{i\theta}\,d\theta = i\left[\frac{e^{i\theta}}{i}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{\overset{1}{e^{2\pi i}}-\overset{1}{e^{0i}}}{i}\right] i = 0$$

c) $f(z)=\cos z$ روی خط راست از $1-i$ تا $1+i$

تابع تحلیلی است پس انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد.

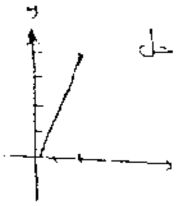
$$\int_{1-i}^{1+i}\cos z\,dz = \left[\sin z\right]_{1-i}^{1+i} = \sin(1+i)-\sin(1-i)$$

$$=\frac{e^{1+i}-e^{-1-i}-e^{1-i}+e^{-1+i}}{2i} = \frac{e^{i}(e^{1}+e^{-1})}{2i} - \frac{e^{-i}(e^{1}+e^{-1})}{2i}$$

$$=(e^{-1}+e^{1})\left(\frac{e^{i}-e^{-i}}{2i}\right) = 2\sinh(1)\sin(1)$$

d) $f(z)=\text{Im}(z^2)$ از صفر تا $2+4i$ در طول پاره خط.

حل:



$$f(z)=\text{Im}(z^2)=\text{Im}\left[x^2-y^2+2xyi\right]=2xy$$

$u=2xy \qquad v=0 \qquad y=2x$ مسیر انتگرال‌گیری C $\Rightarrow dy=2dx$

$$\int_C f(z)\,dz=\int_0^2 2xy\,dx-0\,xdy+i\int_0^2 2xy\,dy+0\,xdx$$

$$=\int_0^2 4x^2dx+i\int_0^2 8x^2dx=\left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^2+i\left[\frac{8}{3}x^3\right]_0^2=\frac{32}{3}+i\frac{64}{3}$$

۲- هرگاه $|f(z)|\leqslant M$ روی منحنی C بطول L باشد آنگاه $\int_C f(z)dz\leqslant ML$

اثبات:

$$\int_C f(z)\,dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k$$

طول C را به n قسمت مساوی با طول $\frac{L}{n}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta z_k=\frac{L}{n} \qquad k=1,2,\ldots,n$$

نامساوی مثلثی

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|f(z_k)|\,\Delta z_k$$

$$\Rightarrow\left|\int_C f(z)\,dz\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}M\frac{L}{n}=ML$$

۳- فرض کنید c قوسی از دایره‌ی $|z|=2$ از $z=2$ تا $z=2i$ باشد که در ربع اول است آنگاه بدون آنکه انتگرال بگیرید نشان دهید

$$\left|\int_c \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$$

اثبات: $|z|=2$ $\quad z=2e^{i\theta} \Rightarrow z^2=4e^{2i\theta} \quad z^2+1=4e^{2i\theta}+1$

باید کران $f(z)$ را مشخص کنیم: $\quad f(z)=\frac{1}{z^2+1}$

$$|f(z)|=\frac{1}{|z^2+1|} \qquad |z^2+1|=|1+4e^{2i\theta}|=|1+4\cos 2\theta+i4\sin 2\theta|$$

$$=\left[(1+4\cos 2\theta)^2+(4\sin 2\theta)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[17+8\cos 2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$9\leqslant[17+8\cos 2\theta]\leqslant 25 \Rightarrow 3<|z^2+1|<5 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{5}<\frac{1}{|z^2+1|}<\frac{1}{3}$$

با توجه به سؤال قبل - سؤال دوم داریم:

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \leqslant ML$$

طول L از $z=2$ تا $z=2i$ محیط ربع دایره یعنی $\frac{\pi}{2}$ است.

$$\Rightarrow \left|\int_c \frac{dz}{z^2+1}\right| = \frac{1}{3}\times\frac{\pi}{2}$$

* دوستان لطفا توجه فرمایید در سؤال فوق در جواب پایانی اشتباهاً $\frac{\pi}{3}$ نوشته شده است *

۴- هرگاه c دایره‌ی $|z| = R > 1$ باشد آنگاه نشان دهید

$$\left| \oint_c \frac{\ln z}{z^2}\, dz \right| < 2\pi \ \frac{\pi + \ln R}{R}$$

اثبات: مانند سوال قبل داریم:

$$f(z) = \frac{\ln z}{z^2} \qquad z = Re^{i\theta} \qquad |f(z)| = \frac{|\ln z|}{|z^2|}, \quad \ln z = \ln R + i\theta$$

$$|f(z)| = \frac{\sqrt{\ln^2 R + \theta^2}}{R^2}$$

$$R > 1 \Rightarrow \ln R > 0 \Rightarrow \sqrt{\ln^2 R + \theta^2} \leqslant \theta + \ln R$$

$$|f(z)| \leqslant \frac{\theta + \ln R}{R^2} \leqslant \frac{2\pi + \ln R}{R^2}$$

$$\left| \oint_c f(z)\, dz \right| \leqslant ML = \frac{2\pi + \ln R}{R^2} \times 2\pi R = 2\pi \ \frac{2\pi + \ln R}{R}$$

* ادامه‌ی سوال: وقتی $R \to \infty$ آنگاه نشان دهید $\oint_c \frac{\ln z}{z^2} dz$ به سمت صفر میل می‌کند.

$$\lim_{R \to \infty} \oint_c \frac{\ln z}{z^2}\, dz = 0$$

قضیه‌ی فشردگی بدهد.

د- داده سوال ۵ ندارد.

۶- با نوشتن $\int_a^b dz$ برحسب انتگرال های توابع حقیقی نشان دهید که مقدار انتگرال برابر $b-a$ است.

* اثبات: a و b دو عدد مختلط باشند. $b = b_1 + b_2 i$ $\quad a = a_1 + a_2 i$

$dz = dx + i dy$

$$\int_a^b dx + i dy = \int_a^b dx + i \int_a^b dy$$

* باید توجه داشت که a و b مختلط می باشند و dx و dy حقیقی و باید کران انتگرال را به کرانهای حقیقی تبدیل کرد.

$$\int_a^b dz = \int_{a_1}^{b_1} dx + i \int_{a_2}^{b_2} dy = b_1 - a_1 + i(b_2 - a_2) = b_1 + ib_2 - (a_1 + ia_2)$$
$$= b - a$$

۷- —

۸- نشان دهید اگر $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_nz^n\ ;\ a_n\neq 0$

یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد که در آن $n\geq 1$ آنگاه عدد مثبتی مثل R موجود است به طوری که به ازای هر z با

$|z|>R$ داریم:

$$|P(z)|>\frac{|a_n||z|^n}{2}$$

اثبات:

$$q(z)=\frac{a_n}{2}z^n$$

فرض می‌کنیم: $\nexists R \ni |p(z)|>|q(z)| \Rightarrow |P(z)|<|q(z)|=\frac{a_n}{2}|z|^n$

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n=H(z)+a_nz^n$$

$$\Rightarrow |H(z)+a_nz^n|<\frac{|a_n|}{2}|z|^n$$

$H(z)$ یک چندجمله‌ای است. بر طبق قضیه‌ی اساسی جبر داریم: $\exists z_1\in\mathbb{C} \ni H(z_1)=0$

if $H(z_1)=0 \Rightarrow |a_n||z|^n<\frac{|a_n|}{2}|z|^n$ $\times$

که تناقض است. پس حتماً Rای وجود دارد.

۹- نشان دهید اگر f در درون و روی منحنی ساده بسته‌ی C تحلیلی باشد و z_0 روی C نباشد آنگاه:

$$\int_C \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0} = \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

* اثبات: مطابق قضیه‌ی انتگرال کوشی اگر f در z_0 تحلیلی باشد آنگاه مشتق آن در آن نقطه تحلیلی است پس داریم:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

تعریف مشتق را برای تابع تحلیلی $f'(z)$ در $z=z_0$ به کار می‌بریم:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0} \qquad \text{I}$$

از طرفی مطابق قضیه‌ی ۴ در صفحه‌ی ۲۰۵

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2} \qquad \text{II}$$

$$\text{I}, \text{II} \Rightarrow \oint_C \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0} = \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

۱۰- فرض کنید f در ناحیه‌ی بسته و کراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیرثابت باشد. با فرض اینکه در همه جا در R، $f(z)\neq 0$:

تابع $\frac{1}{f(z)}$ را در نظر بگیرید و ثابت کنید که $|f(z)|$ جایی در R دارای مقدار مینیمم N است و به ازای هر نقطه‌ی داخلی z داریم $|f(z)|>N$

* اثبات: چون $f(z)\neq 0$ آنگاه $\forall z \in R,\ f(z)\neq 0 \ ;\ g(z) = \frac{1}{f(z)} \ ,\ g'(z) = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}$

$g(z)$ در تمام نقاط R تحلیلی است. از طرفی چون $f(z)$ غیرثابت است پس $g(z)$ نیز غیرثابت است. چون شرایط قضیه‌ی اصل ماکزیمم برای $g(z)$ برقرار است پس:

$\forall z \in R$

$\exists z_0 \in C_R \ni g(z_0) = \max g(z)$ (C_R مرز R است)

$g(z_0) = M \qquad |g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq M \Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} \leq M \Rightarrow |f(z)| \geq M = N$

$\forall z \in R \ : \ |f(z)| \geq N$

تساوی در این نامساوی زمانی رخ می‌دهد که نقطه در مرز حاصل شود ولی به ازای نقاط داخلی R

$|f(z)| > N$

(همان چیزی که در سؤال مطرح شد)

۱۱- فرض کنید f تابعی تام باشد که به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)| \leqslant A|z|$ که در آن A عددی ثابت و مثبت

است. نشان دهید که یا به ازای هر z، $f(z)=0$ و یا به ازای هر z، $f(z)=a_1 z$ و $a_1 \neq 0$

* اثبات: ابتدا باید نشان دهیم که اگر f و g در ناحیه همبند ساده و کران‌دار D تحلیلی باشند و:

$$\text{if} \quad \forall z : \quad |f(z)| < |g(z)| \quad \text{آنگاه} \Rightarrow |f'(z_0)| < |g'(z_0)|$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$ (z_0 روی مرز c نیست)*

$$|f(z)| < g(z) \Rightarrow \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^2|} < \frac{|g(z)|}{|(z-z_0)^2|} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{|f(z)|\,dz}{|(z-z_0)^2|} \leqslant \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{g(z)\,dz}{|(z-z_0)^2|}$$

$$f'(z_0) \leqslant g'(z_0)$$

حالا به سؤال برمی‌گردیم:

$$|f(z)| \leqslant A|z| = |Az|$$

$$|f'(z)| \leqslant |A| = A$$

چون f تام است پس f' نیز تام است، از طرفی نشان دادیم که $f'(z)$ کران‌دار است پس شرایط قضیه لیوویل

برآورده شد. در نتیجه، نتیجه قضیه برقرار می‌شود یعنی:

$$f'(z) = c$$

$$\text{if} \quad c = 0 \Rightarrow f(z) = 0$$

$$\text{if} \quad c \neq 0 \Rightarrow f(z) = cz = a_1 z \ , \ a_1 \neq 0$$

* ۱۲- نشان دهید

a) $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \quad ; \; |z+1| < 1$

$z_0 = -1$

شرایط قضیه تیلور را دارد ⇐

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+1)^n$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad c_0 = \frac{f(-1)}{0!} = 1 \qquad c_1 = \frac{f'(-1)}{1!} = 2 \qquad c_2 = \frac{f''(-1)}{2!} = 3 \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$$

b) $\frac{1}{z^2} = f(z) \qquad |z-2| < 2 \qquad z_0 = 2$

$$c_0 = \frac{f(2)}{0!} = \frac{1}{4} \qquad c_1 = \frac{f'(2)}{1!} = \frac{\frac{-2}{8}}{1!} = -\frac{1}{4}$$

بازهم شرایط قضیه تیلور را دارا است :

$$c_2 = \frac{f''(2)}{2!} = \frac{\frac{6}{2^4}}{2!} = \frac{3}{16} = \quad , \quad c_3 = \frac{f'''(2)}{3!} = \frac{\frac{-24}{2^5}}{3!} = -\frac{4}{32}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^n} (n+1)$$

c) $\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$

$$\frac{1}{z(-z+4)} = \frac{1}{z(4-z)} = \frac{1}{4z} \times \frac{1}{1-\frac{z}{4}}$$

با توجه به بسط $\frac{1}{1-z}$ برای $\frac{1}{1-\frac{z}{4}}$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{1-\frac{z}{4}} = 1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{4^2} + \cdots \quad \text{I}$$

حال طرفین را در $\frac{1}{4z}$ ضرب کنیم ⇐ I

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \frac{1}{4^2} + \frac{z}{4^3} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

۱۴- سری تیلور هر یک از توابع زیر را حول نقاط داده شده بدست آورید.

a) $f(z) = \cos z \quad ; \quad z = \frac{\pi}{2}$

$$f(z) = f(\tfrac{\pi}{2}) + f'(\tfrac{\pi}{2})(z-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2!}(z-\tfrac{\pi}{2})^2 + \cdots$$
$$= -(z-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{3!}(z-\tfrac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{5!}(z-\tfrac{\pi}{2})^5 + \cdots$$

b) $f(z) = \sinh z \quad ; \quad z = \pi i \qquad f'(z) = \cosh z \quad , f''(z) = \sinh z$

$$f(z) = f(\pi i) + f'(\pi i)(z-\pi i) + \frac{f''(\pi i)}{2!}(z-\pi i)^2 + \cdots$$
$$= \sinh \pi i + \cosh \pi i \,(z-\pi i) + \frac{\sinh(\pi i)}{2!}(z-\pi i)^2 + \cdots$$
$$= i\sin\pi + \cos\pi\,(z-\pi i) + \frac{i\sin\pi}{2!}(z-\pi i)^2 + \cdots$$
$$= -(z-\pi i) - \frac{1}{3!}(z-\pi i)^3 - \frac{1}{5!}(z-\pi i)^5 - \cdots$$

c) $f(z) = z^5 \quad , z = -1 \qquad f'(z) = 5z^4 \ , f''(z) = 20 z^3 \ , f'''(z) = 60 z^2, \ldots, f^{(5)}(z) = \ldots$

$$f(z) = -1 + 5(z+1) - 10(z+1)^2 + \cdots + 5!\,(z+1)^5 + 0 + \cdots$$

d) $f(z) = (z+1)^3 \qquad z = 2i \qquad f'(z) = 3(z+1)^2 \ , \ldots\ f'''(z) = 6 \ , \forall n \geq 4 : f^{(n)}(z) = 0$

$$f(z) = (1+2i)^3 + 3(1+2i)^2(z-2i) + 3(1+2i)(z-2i)^2 + 6(z-2i)^3 + 0 + 0 + \cdots$$

e) $f(z) = \sin z^2 \qquad z = 0$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \Rightarrow \sin z^2 = z^2 - \frac{z}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \cdots$$

f) $f(z) = \ln z \quad ; \quad z = 1 \qquad f'(z) = \frac{1}{z} \qquad f^{(n+1)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} \quad n = 1, \ldots$

$$f(z) = f(1) + f'(1)(z-1) + \frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2 + \cdots$$
$$= (z-1) - (z-1)^2 + (z-1)^3 - \cdots$$

[illegible]

a) $f(z) = e^z \sin z$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum a_n z^n \quad , \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum b_n z^n$$

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

$$\text{if} \quad \forall z : |z| < R \quad : \quad \sum a_n z^n \longrightarrow \text{[illegible]}$$

$$\forall z : |z| < R \quad : \quad \sum b_n z^n \longrightarrow \text{[illegible]}$$

[illegible]

$$\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n \quad , \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

$$\Rightarrow c_0 = a_0 b_0 \quad , \quad c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 \quad , \quad c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 \ , \ \ldots$$

$$\underline{f(z)} = z + z^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) z^3 + \cdots$$

b) $f(z) = z \cot z \qquad g(z) = \cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots}$

$$\begin{array}{l|l}
1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots & z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\ \hline
-\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\right) \cdots & \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z + \alpha z^3 + \cdots \\
\hline
\left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) z^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) z^4 + \cdots & \\
-\left[\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^4 + \cdots\right] & \\
\hline
\left[\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right)\right] z^4 + \cdots & \\
\qquad \alpha &
\end{array}$$

$$\cot z = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z + \alpha z^3 + \cdots$$

$$z \cot z = 1 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^2 + \alpha z^4$$

c) $f(z) = z\sin z^2$

الحسابی مثل ۱۵ سوری ؛

$$\sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + - \dots \qquad , \quad z = 0 + 1z + 0z^2 + 0z^3 + \dots$$

مطابق قضیه‌ی ضرب سری‌ها که در مورد a توضیح داده شد داریم:

$$f(z) = z^3 - \frac{z^7}{3!} + \frac{z^{11}}{5!} - \dots$$

*۱۶- هر یک از توابع زیر را حول مبدأ مختصات به صورت سری لوران بسط دهید.

a) $\dfrac{e^{2z}}{z^3}$: $e^{2z} = 1 + 2z + \dfrac{(2z)^2}{2!} + \dfrac{(2z)^3}{3!} + \dfrac{(2z)^4}{4!} + \dots$

$$\Rightarrow \frac{e^{2z}}{z^3} = z^{-3} + 2z^{-2} + 2z^{-1} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3}z + \dots$$

b) $z\cos\frac{1}{z} = z\left(1 - \dfrac{1}{2!\,z^2} + \dfrac{1}{4!\,z^4} - \dfrac{1}{6!\,z^6} + \dots\right)$

$$= z - \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{4!\,z^3} - \frac{1}{6!\,z^5} + \dots$$

c) $\dfrac{\sinh \pi z}{z^2} = \dfrac{1}{z^2}\left(\pi z + \dfrac{(\pi z)^3}{3!} + \dfrac{(\pi z)^5}{5!} + \dots\right) = z^{-1}\pi + \dfrac{\pi}{3!} + \dfrac{\pi}{5!}z^3 + \dots$

d) $\dfrac{1}{z^2+z^4} = \dfrac{1}{z^2(1+z^2)} = \dfrac{1}{z^2}\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots\right) \rightarrow |z|<1.$

$$= z^{-2} - 1 + z^2 - z^4 + \dots \qquad |z| < 1$$

توجه شود سری داده شده تنها برای نقاط داخل دایره همگرا می‌باشد

e) $\dfrac{z-1}{z^2-z^4} = \dfrac{-(z-1)}{z^2(z-1)(1+z)} = \dfrac{-1}{z^2(1+z)} = \dfrac{-1}{z^2}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots\right)$

f) $z^3\cosh\frac{1}{z} = z^3\left(1 + \dfrac{(\frac{1}{z})^2}{2!} + \dfrac{(\frac{1}{z})^4}{4!} + \dots\right) = z^3 + \dfrac{z}{2!} + \dfrac{1}{4!}z^{-1} + \dots$

۱۷- بسط لوران هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده بدست آورید.

a) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$; $z_0=1$

ابتدا سری تیلور e^z را حول $z_0=1$ داریم:

$$e^z = 1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^3}{3!}+\cdots$$

$$f(z)=(z-1)^{-2}e^z=(z-1)^{-2}+(z-1)^{-1}+\frac{1}{2!}(z-1)^0+\frac{(z-1)}{3!}+\cdots$$

b) $\dfrac{1}{z^2+1}$; $z_0=i$

$$\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}=\frac{P(z)}{z-i}\quad , \quad P(z)=\frac{1}{z+i}\quad , \quad P^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n n!}{(z+i)^{n+1}}$$

$$\frac{P^{(n)}(i)}{n!}=\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}\Rightarrow P(z)=\frac{1}{2i}+\frac{(z-i)}{2^2\times 1}+\frac{(z-i)^2}{2^3 i^3}+\frac{(z-i)^3}{2^4\times 1}+\cdots$$

$$\Rightarrow P(z)=-\frac{i}{2}+\frac{(z-i)}{4}+\frac{i}{8}(z-i)^2+\frac{1}{16}(z-i)^4+\cdots$$

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{P(z)}{z-i}=-\frac{i}{2}(z-i)^{-1}+\frac{1}{4}+\frac{i}{8}(z-i)+\frac{1}{16}(z-i)^2+\cdots$$

c) $\dfrac{z+i+1}{(z+i)^2}$; $z_0=-i$

چون $P(z)$ چندجمله‌ای است $P(z)=z+1+i$ پس سری تیلورش با خودش یکی است.

$$P(z)=1+(z+i)+0(z+i)^2+\cdots$$

$$(z+i)^{-2}P(z)=(z+i)^{-2}+(z+i)^{-1}+0+0+0+\cdots$$

d) $\dfrac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{4})^3}$; $z_0=\frac{\pi}{4}$

$$P(z)=\sin z=(z-\tfrac{\pi}{4})-\frac{(z-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\frac{(z-\frac{\pi}{4})^5}{5!}-\cdots$$

$$f(z)=(z-\tfrac{\pi}{4})^{-3}P(z)=(z-\tfrac{\pi}{4})^{-2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}(z-\tfrac{\pi}{4})^2+\cdots$$

* ۱۸- با مشتق‌گیری از سری مکلورن $\frac{1}{1-z}$ نشان دهید که

a) $$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots \qquad \text{(I)}$$

$$\left(\frac{1}{(1-z)}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \qquad \leftarrow \text{(I)}$$ مشتق دست راست رابطهٔ

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

b) $$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

کافیست از طرفین رابطهٔ قبل مشتق بگیریم :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

۱۹- با انتگرال‌گیری از سری مکلورن $\frac{1}{1+s}$ در امتداد مسیری از $s=0$ تا $s=z$ در داخل دایرهٔ همگرایی نشان دهید که

$$\ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \ ; \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+s} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots \qquad |s| < 1$$

$$\int_0^z \frac{ds}{1+s} = \int_0^z (1 - s + s^2 - s^3 + \dots)\, ds$$

توجه: * از هر سری در داخل دایرهٔ همگرایی آن می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

$$\ln(1+s)\Big]_0^z = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \dots\Big]_0^z$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \ , \quad |z| < 1$$

۲۰. ثابت کنید هرگاه $f(0)=1$ و برای $z\neq 0$، $f(z)=z^{-1}\ln(z+1)$ آنگاه f در سراسر حوزه $|z|<1$ تحلیلی است.

حل: اثبات: می‌دانیم $\ln(z+1)$ یک تابع تحلیلی در $|z|<1$ است پس داریم:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad ; \quad |z| < 1$$

$$f(z) = z^{-1}\ln(1+z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \dots + \frac{(-1)^n z^n}{n+1} + \dots$$

چون از دستور پیدا کردن شعاع همگرایی استفاده کنیم داریم:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad , \quad a_n = \frac{(-1)^n z^n}{n+1}$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{\sqrt[n]{n}} = \frac{|z|}{1} < 1 \Rightarrow |z|<1$$

از طرفی چون توانستیم $f(z)$ را به صورت یک سری توانی با شعاع همگرایی معلوم بنویسیم و چون می‌دانیم یک سری توانی داخل دایره همگرایی‌اش تحلیلی است پس $f(z)$ در $|z|<1$ تحلیلی است.

۲۱- ثابت کنید اگر f در z_0 تحلیلی باشد و $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m)}(z_0) = 0$ آنگاه تابع

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z-z_0)^{m+1}} f(z) & ; \ z \neq z_0 \\[2ex] \dfrac{1}{(m+1)} f^{(m+1)}(z_0) & ; \ z = z_0 \end{cases}$$

در z_0 تحلیلی است.

* اثبات: f در z_0 تحلیلی است پس داریم:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots$$

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m)}(z_0) = 0$$

$$f(z) = \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1} + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^{m+2} + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots$$

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} = \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m-1} + \dots$$

این تابع در همسایگی محذوف z_0 با $g(z)$ برابر است. همچنین در $z=z_0$ پیوسته است. چون $g(z)$ از تقسیم دو تابع تحلیلی حاصل شده و به صورت سری توانی نوشته شد پس تحلیلی است.

* ۱۲- مطلوب است محاسبه‌ی مانده مربوط از توابع زیر در نقاط تکین آنها:

a) $\dfrac{1}{1-e^z}$ $\qquad z = 0 \,, 2\pi i , 4\pi i , 6\pi i , \ldots$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{1-e^z} = \lim_{z\to 0} (z)\frac{1}{1-e^z} \overset{hop}{=\!=} \lim \frac{1}{-e^z} = -1$$

* برای تعیین نقاط تکین دیگر می‌توان مقادیر مانده‌ها را حساب نمود.

b) $\dfrac{z}{z^4-1} = \dfrac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)}$ $\qquad z = \pm i \,, \pm 1$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \cancel{(z-1)} \frac{z}{\cancel{(z-1)}(z+1)(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to 1} \frac{z}{(z+1)(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$$

برای تعیین نقاط هم به همین ترتیب عمل کنید.

c) $\dfrac{6-4z}{z^2(z+3)}$ $\qquad z = 0 , 0 \quad , z = -3$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left[f(z)\right] = \lim_{z\to 0} \frac{d\left(\frac{6-4z}{z^2(z+3)}\, z^2\right)}{dz} = -2$$

* برای $z=-3$ به همین شکل قبل مورد b عمل کنید.

d) $\dfrac{1}{(z^4-1)^2}$ $\qquad z^4 = 1 \qquad z = \pm 1 \,, \pm i$ تمام ریشه‌ها دوبار تکراری شوند

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left[f(z)\right] = \lim \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-1)^2}\,\frac{1}{\cancel{(z-1)^2}(z+1)^2(z-i)^2(z+i)^2}\right) = \ldots$$

* برای تعیین بقیه ریشه‌ها نیز به صورت فوق عمل کنید.

e) $\dfrac{z+2}{(z+1)(z-4i)(z+4i)}$ $\qquad z = -1 , 4i , -4i$ نقاط تکین اند.

* با هم مشابه مورد b عمل کنید.

f) $\dfrac{-z^2+8-32z}{z(z-1)(z-4)}$ $\qquad z = 0 , 1 , 4$

* مشابه مورد b

۲۳. مطلوبست محاسبه‌ی مقدار انتگرال‌های زیر:

a) $\oint\limits_{|z|=1} z\cot z \, dz = 0$

چون طبق جواب سؤال حل شده ۱۸ قسمت a تابع $z\cot z$ تحلیلی است.

b) $\oint\limits_{|z|=1} \tan z \, dz = 0$ تحلیلی است

c) $\oint \frac{\sin \pi z}{z^4} \, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) = 2\pi i \, C_{-1}$

$\sin \pi z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \qquad \frac{\sin \pi z}{z^4} = z^{-3} - \frac{z^{-1}}{3!} + \frac{z}{5!} - \cdots \Rightarrow C_{-1} = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=1} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{-1}{6} = \frac{-\pi i}{3}$;

d) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z+1}{z^4 - 2z^3} = 2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)$

$z=0$ قطب مرتبه سه است پس:

$C_{-1} = \operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim\limits_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3 f(z)$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z+1}{z-2} \right) = \frac{1}{2} \lim \frac{6}{(z-2)^3} = -\frac{3}{8}$

$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{-3}{8} = -\frac{3\pi i}{4}$;

e) $$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+5z^3+z^4} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

$$z^4+6z^3+5z^2 = z^2(z^2+5z+6) = z^2(z+2)(z+3)=0$$

$z=0$ درون ناحیه است.

$$c_{-1} = \lim \frac{d}{dz}\left(\cancel{z^2} \frac{1}{\cancel{z^2}(z+2)(z+3)}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+5z+6}\right)$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2z+5}{(z^2+5z+6)^2} = \frac{5}{36}$$

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \,\frac{5}{36} = \frac{5\pi i}{18};$$

f) $$\oint_{|z|=1} \frac{6z^2-4z+1}{(z-2)(1+4z^2)}\,dz$$

$$1+4z^2=0 \Rightarrow z^2 = i^2\frac{1}{4} \quad z=\pm\frac{i}{2};$$

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{2}} f(z)\right]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{i}{2}} \left(z-\frac{i}{2}\right) \frac{6z^2-4z-1}{4(z-2)(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})} = \frac{-\frac{3}{2}-2i+1}{4i(-2+\frac{i}{2})} = \alpha$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{2}} f(z) = \lim \left(z+\frac{i}{2}\right) \frac{6z^2-4z-1}{4(z-2)(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})} = \frac{1+2i-\frac{3}{2}}{4i(2+\frac{i}{2})} = \beta$$

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i(\alpha+\beta)$$

g) $\oint_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{(2z+1)(z^2+4)} = \oint_C \frac{f(z)}{2z+1}\,dz = \frac{1}{2}\oint_C \frac{f(z)}{z+1/2}\,dz = \frac{1}{2}\, 2\pi i \lim_{z\to -1/2} f(z) =$

$= \pi i \lim \frac{z^3-3z^2+1}{z^2+4} = \pi i \cdot \frac{1/8 + 3/4 + 1}{4 + 1/4} = \lambda i/\beta$

h) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{(z-i)\pi/2}}{\sin z}\,dz = \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{(z-i)\pi/2}}{\cos z}$

$= 2\pi i \cdot \frac{e^{-i\pi/2}}{1} = -2\pi i$

* اگر $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ، $p(z_0) \neq 0$ ، $q(z_0) = 0$ آنگاه :

$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z)-0}{z-z_0}}$

$= \lim_{z\to z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

i) $\int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^2-3iz}\,dz = \oint_C \frac{(\cosh z)/z^2-3i}{z}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz$

$= 2\pi i \lim z \cdot \frac{f(z)}{z} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\cosh z}{z^2-3i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{-3i} = \frac{-2\pi}{3}$

j) $\int_{|z|=1} \frac{30z^2-23z+5}{(2z-1)^2(3z-1)}\,dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=1/2} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1/3} f(z)\right]$

$\operatorname{Res}_{z=1/2} f(z) = \lim_{z\to 1/2} \frac{1}{4}\frac{d}{dz}(z-1/2)^2 \cdot \frac{30z^2-23z+5}{(3z-1)(z-\frac{1}{2})^2} =$

$\frac{1}{4}\lim \frac{d}{dz} \frac{30z^2-23z+5}{3z-1} = \frac{1}{4}\lim_{z\to 1/2} p(z) = \frac{1}{4} p(\frac{1}{2})$

$\operatorname{Res}_{z=1/3} f(z) = \frac{1}{3}\lim_{z\to 1/3} \frac{30z^2-23z+5}{(2z-1)^2} = 1/3 \lim_{z\to 1/3} q(z) = 1/3\, q(1/3)$

$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \left[\frac{1}{4} p(1/2) + 1/3\, q(1/3)\right]$

k) $\oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z(z^2+1)}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\cosh z}{1+z^2} = 2\pi i$

L) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2}\cosh z}{\cos z/2}\,dz = 0$

m) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{-z^2-22z+8}{z^3-5z^2+4z}\,dz \qquad z(z^2-5z+4)=z(z-1)(z-4)=0$

$$I=\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)\right]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{-z^2-22z+8}{3z^2-10z+4}=\frac{8}{4}=2$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{-z^2-22z+8}{3z^2-10z+4}=\frac{-1-22+8}{-3}=5 \qquad I=14\pi i$$

---

* ۲۴) مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال های زیر

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} \Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad d\theta=\frac{dz}{iz}$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(2+\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)}=\oint\frac{2\,dz}{4iz+iz^2+i}$$

$$z_1=\frac{-4i+i\sqrt{12}}{2i} \qquad z_2=\frac{-4i-i\sqrt{12}}{2i}$$

$$z_1=\frac{\sqrt{12}-4}{2}=\sqrt{3}-2 \qquad z_2=-2-\sqrt{3}$$

در داخل دایره قرار دارد — در دایره قرار ندارد

$$I=2\pi i\,\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}\right]=2\pi i\lim_{z\to\sqrt{3}-2}\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}=2\pi i\times\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

---

b) $\displaystyle = \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\frac{1}{3}\cos\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{1+\frac{z^2+1}{6z}}=-6i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}$

$$=(-6i)(2\pi i)\operatorname*{Res}_{z=-3+2\sqrt{2}} f(z)=12\pi\lim_{z\to -3+2\sqrt{2}}\frac{1}{2z+6}=12\pi\,\alpha$$

page 5

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{17-8\cos x}\,dx \Rightarrow \quad I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{17-\frac{8}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\,\frac{dz}{iz}$

$= \oint \frac{\frac{1}{2}(z^2+1)}{iz(17z-4z^2-4)}\,dz \qquad z=0$

$z_1 = \frac{-17+\sqrt{15}}{-8} = 1.64 \qquad z_2 = \frac{-17-\sqrt{15}}{-8} = 2.6$

$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[f(z)\right] = 2\pi i \lim \frac{\frac{1}{2}(z^2+1)}{17z-4z^2-4} \times \frac{1}{i} = \frac{\frac{1}{2}}{-4} \times \frac{1}{i}$

$\times 2\pi i = \pi/4$

---

d) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{13-12\times\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)} \times \frac{dz}{iz}$

$\oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{2z^2\left(13-6z^2-\frac{6}{z^2}\right)} \times \frac{dz}{i} \qquad z=0$ ریشه مضاعف

$\oint \frac{z^4+z^2}{i2z^2(13z^2-6z^4-6)} = \oint \frac{z^4+z^2}{i2(13z^2-6z^4-6)z^2}\,dz$

$z^2 = 1.5 \qquad z = \pm\sqrt{1.5} \qquad z^2 = 2/3 \qquad z = \pm\sqrt{2/3}$

$I = \oint \frac{z^4+z^2}{2z^2 i\left(z-\sqrt{1.5}\right)\left(z+\sqrt{1.5}\right)\left(z-\sqrt{2/3}\right)\left(z+\sqrt{2/3}\right)}\,dz =$

$2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[f(z)\right]$

$z = \sqrt{1.5},\ -\sqrt{1.5},\ -\sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ .$

---

e) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta}\,d\theta$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{3+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{iz(z^2+4z+1)}\,dz$$

$z_1 = 0$ داخل دایره است $z_2 = -0/085$ داخل دایره است $z_3 = -2/91$ بیرون دایره

$$I = 2\pi i \sum_{z=0,\,-0/085} \operatorname{Res}\left[F(z)\right]$$

---

f) $$I = \int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos 2\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=1}\frac{\frac{1}{4i^2}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2}{5-4\left[\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right]}\frac{dz}{iz}$$

$$= \oint \frac{-\frac{1}{4}\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)}{5z-2z^3-\frac{2}{z}} = \oint\frac{-\frac{1}{4}\left(z^4-2z^2+1\right)}{\left(5z^3-2z^5-2z\right)}\frac{dz}{i}$$

$$= \oint \frac{-1/4\,(z^2-1)^2}{z(5z^2-2z^4-2)}\frac{dz}{i}$$

$$I = 2\pi i\left[\lim_{z\to 1/2}\frac{-1/4(z^2-1)^2}{z(z-2)} + \lim_{z\to 2}\frac{-1/4(z^2-1)^2}{z(z-1/2)} + \lim_{z\to 0}\frac{-1/4(z^2-1)^2}{(z-1/2)(z-2)}\right.$$

---

g) $$I = \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta}\,d\theta = \oint\frac{1/4\,(z+1/z)^2}{26-10\left(1/2\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$= \oint\frac{1/4\,(z^2+1)^2\,dz}{i(26z^3-5z^5-5z)} = \oint\frac{1/4\,(z^2+1)^2}{iz(26z^2-5z^4-5)}\,dz$$

$$z^2 = \frac{-26\pm 24}{-10} \begin{cases} 5 \\ 0/2 \end{cases}$$

$z_5 = 0$ $z_4 = \sqrt{0/2}$ $z_3 = -\sqrt{0/2}$ $z_2 = -\sqrt{5}$ $z_1 = \sqrt{5}$

h) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 2\theta}{5-4\cos^2\theta}\,d\theta$

$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac14\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2}{\left(5-4\times\frac12\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right)}\frac{dz}{iz}=\oint\frac{\frac14\left(z^4+1\right)^2}{z^5\left(5-2z^2-\frac{2}{z^2}\right)}\frac{dz}{i}$

$=\oint\frac{1}{4z^5 i}\cdot\frac{(z^4+1)^2}{(5z^2-2z^4-2)}\,dz$ $\quad z=0 \quad z_1=0 \quad z^2=2 \quad z^2=1/2$

$z_2=-\sqrt{2} \quad z_3=\sqrt{2} \quad z_4=-\sqrt{1/2} \quad z_5=\sqrt{1/2}$

$I=2\pi i\left[\lim_{z\to-\sqrt2}\frac{(z^4+1)^2}{4z^5 i(z-\sqrt2)(z+\sqrt{1/2})(z-\sqrt{1/2})}+\lim z^4+1 \ldots\right.$

---

j) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{4+\frac43\sin2\theta}\,d\theta \qquad \cos\theta=\frac12\left(z+\frac1z\right)$

$\sin2\theta=\frac{1}{2i}\left(z^2-\frac{1}{z^2}\right) \qquad d\theta=\frac{dz}{iz}$

$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac12\left(z+\frac1z\right)}{4+\frac43\times\frac{1}{2i}\left(z^2-\frac{1}{z^2}\right)}\frac{dz}{iz}=\oint\frac{\frac12(z^2+1)}{i\left(4z^2+\frac{2}{3i}z^4-\frac{2}{3i}\right)}\,dz$

$=\oint\frac{3/2\,(z^2+1)}{2z^4+12iz^2-2} \qquad z^2=\frac{-12i\pm11.31i}{4}$

$z^2=-2.83i \qquad z^2=-0.17i$

۲۵) نشان دهید که

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \pi\sqrt{2}$ $\qquad 1+\sin^2\theta = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$= \frac{3+3\tan^2\theta-1+\tan^2\theta}{2(1+\tan^2\theta)} = \frac{2+4\tan^2\theta}{2(1+\tan^2\theta)} = \frac{1+2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{1+(\sqrt{2}\tan\theta)^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}u + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\theta\tan\theta + C = \frac{\theta}{\sqrt{2}}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}$$

---

b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{(1-a^2)}}$ $\qquad -1<a<1$

$$2\cos x = Z+\frac{1}{Z} = \frac{Z^2+1}{Z} \qquad Z=e^{i\theta} \qquad dZ = ie^{i\theta}d\theta = iZ\,d\theta$$

$$d\theta = \frac{dZ}{iZ} \Rightarrow \oint_{|Z|=1} \frac{\frac{dZ}{iZ}}{\frac{aZ^2+2Z+a}{2Z}} = \frac{2}{i}\oint_{|Z|=1}\frac{dZ}{aZ^2+2Z+a}$$

$$aZ^2+2Z+a=0 \Rightarrow Z = \frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$$

$$\oint_{|Z|=1} f(Z)\,dZ = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(Z)$$

$$Z = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a} = Z_0$$

$$\mathrm{Res}_{Z=Z_0} f(Z) = \lim_{Z\to Z_0} \frac{1}{2aZ+2} = \frac{1}{2-2+2\sqrt{1-a^2}}$$

$$\int \frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = \frac{2}{i}\times 2\pi i\times\frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

---

c) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^2}$ $\quad ; \quad a>1$

$$\cos\theta = \frac{Z}{2}+\frac{1}{2Z} = \frac{Z^2+1}{2Z} \qquad a+\cos\theta = a+\frac{Z^2+1}{2Z} = \frac{Z^2+2aZ+1}{2Z}$$

$$\int_0^{\pi} f(\theta)\,d\theta = \frac{4}{i}\oint_{|Z|=1}\frac{Z\,dZ}{(Z^2+2aZ+1)^2} = \Big(\frac{4}{i}\sum_{|Z|=1}\mathrm{Res}\,f(Z)\Big)2\pi i = 8\pi\,\mathrm{Res}_{Z=Z_0} f(Z)$$

$$Z^2+2aZ+1=0 \Rightarrow Z = -2a\pm\sqrt{4a^2-4} \qquad Z = -2a\pm 2\sqrt{a^2-1}$$

تنها $z_0=-2a+2\sqrt{a^2-1}$ در داخل ناحیه $|z|=1$ قرار دارد

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}(z-z_0)^2 f(z)$$

با ضرب و نشان کردن نتیجه می‌گیریم که: $\int_0^\pi f(\theta)d\theta=\frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$

---

d) $\int_0^\pi \sin^{2n}\theta\, d\theta=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi \quad ; \ n=1,2,\dots$

$(\sin^2\theta)^n \Rightarrow \quad \sin\theta=\left(\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{2i}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(z^2+\frac{1}{z^2}-2\right)=\frac{-z^4+1+2z^2}{4z^2}$

$d\theta=\frac{dz}{iz} \qquad \frac{(-z^4+2z^2+1)^n}{4z^{2n}}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{4i}\cdot\frac{(-z^4+2z^2+1)^n}{z^{2n+1}}$

$\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}\frac{(-z^4+2z^2+1)^n}{z^{2n+1}}dz=\frac{1}{4i}\cdot 2\pi i\,\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\,z^{2n+1}\cdot\frac{(-z^4+2z^2+1)^n}{z^{2n+1}}$

$\frac{\pi}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\cdot(-z^4+2z^2+1)=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$

---

*۳۶) مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=I \qquad I=2\pi i\sum \operatorname{Res} f(z), \quad f(z)=\frac{1}{1+z^4}$

$z^4+1=0 \quad z^4=e^{i\pi} \Rightarrow z=e^{i\frac{2k\pi+\pi}{4}}\ (\operatorname{Im}z)>0$

$z_1=e^{i\pi/4}, \quad z_2=e^{i\pi/2}=i \quad , z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}}$

این سه جواب قابل قبول هستند سه جواب در ناحیه $\operatorname{Im}(z)<0$ واقع اند.

$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{z^5}=\qquad\frac{1}{4z_1^5}=\alpha$ کامل شود

$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{4z^5}=\beta \qquad \operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z)=\frac{1}{4z_3^5}=\gamma$

$I=2\pi i(\alpha+\beta+\gamma)$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = 2\pi i \sum_{Im(z)>0} Res\, f(z)$

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-2z+2)^2} \qquad z^2-2z+2=0 \Rightarrow z = 1 \pm i$$

$(z^2-2z+2)^2 = (z-1-i)^2(z-1+i)^2$ نقطه $z=1+i$ در $Im(z)>0$ قرار دارد

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z) \qquad \operatorname*{Res} f(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{d}{dz}(z-1-i)^2 \cdot \frac{z}{(z-1-i)^2(z-1+i)^2}$$

$$= \lim_{z\to 1+i} \frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1+i)^2} = \lim \frac{(z-1+i)-2z}{(z-1+i)^3} = \alpha \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\alpha$$

---

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \pi i \sum_{Im(z)>0} Res\, f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{((z-i)(z+i))^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

$z=i$ قابل قبول: یک قطب مرتبه دوم است.

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \pi i \lim \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2} = -2\pi i \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)^3}$$

$$= -2\pi i \cdot \frac{1}{8i^3} = \pi/8$$

---

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = 2\pi i \sum_{Im(z)>0} Res\, f(z) \qquad z^2+1=0 \quad z=\pm i$

$$z^2+9=0 \quad z = \pm 3i$$

$\Rightarrow z_0 = i,\ z_1 = 3i \qquad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim \dfrac{1}{(z+i)(z^2+9)} = \dots$

Page 6

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) = \lim \frac{1}{(z^2+1)(z+3i)} = \beta \qquad I = 2\pi i\,(\alpha+\beta)$$

---

e) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} \Rightarrow 2\pi i \sum_{Im(z)>0} \operatorname{Res} f(z)$$

$$(z+1)^2(z^2+4)^2 = (z-i)(z+i)(z-2i)^2(z+2i)^2 \qquad z_0 = i \;,\; z_1 = 2i$$

نا تحلیل

قطب ساده   قطب مرتبه دوم

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim \frac{1}{(z+i)(z^2+4)^2} = \alpha$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\,(\alpha+\beta)$$

---

f) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi i \sum_{Im(z)>0} \operatorname{Res} f(z)$$

$$f(z) = \frac{1+z^2}{1+z^4} \,, \qquad 1+z^4 = 0 \Rightarrow z = e^{-i\frac{2k\pi+\pi}{4}} \,, k = 0,1,2,\dots,5$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \,, \quad z_1 = i \,, \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1+z^2}{4z^5} = \frac{1+e^{i\pi/2}}{4e^{5\pi/4}} = \alpha$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim \frac{1+z^2}{4z^5} = \frac{1+i^2}{4i^5} = 0 \qquad \operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z) = \lim_{z\to z_3} \frac{1+z^2}{4z^5} = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\,(\alpha+0+\beta)$$

---

g) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \Big[2\pi i \operatorname{Res} f(z)e^{iz}\Big]_{Im(z)>0}$$

$$\int_C f(z)e^{iz}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx \Rightarrow$$

$$\int_C f(z)e^{iz}\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res} f(z)e^{iz} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res} g(z)$$

$$g(z) = \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}, \quad z=\pm i, \quad z=\pm 2i$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} g(z) = \lim_{z\to i} \frac{z e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)} = \alpha, \quad \operatorname{Res}_{z=2i} g(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)} = \beta$$

$$\int_C f(z)e^{iz}\,dz = 2\pi i(\alpha+\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \operatorname{Im}\left(2\pi i(\alpha+\beta)\right)$$

$$h=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x+a)^2+b^2}=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{ix}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{ix}\,dx=\int_{\substack{C\\ \operatorname{Im}(z)>0}}f(z)\,e^{iz}\,dz \Rightarrow \int\frac{e^{iz}\,dz}{(z+a)^2+b^2}=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}(z)>0}\operatorname{Res}\,g(z)$$

* تابع $(z+a)^2+b^2$ دارای دو ریشه است: $z_1=-a-ib$ و $z_2=-a+ib$

که هیچکدام در $\operatorname{Im}(z)>0$ نیستند پس تابع $f(z)$ در $\operatorname{Im}(z)>0$ تحلیلی است.

$$\int_{\operatorname{Im}(z)>0}f(z)\,e^{iz}\,dz=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x+a)^2+b^2}=0$$

$$i=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+9)^2}=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+9)^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{ix}\,dx=\int_{\operatorname{Im}(z)>0}f(z)\,e^{iz}\,dz$$

$$\int\frac{e^{iz}}{(z^2+9)^2}\,dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}(z)>0}\operatorname{Res}\,g(z)$$

$$z^2+9=0 \Rightarrow z=\pm 3i \Rightarrow z_0=3i$$

$$\operatorname{Res}_{z=3i}g(z)=\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z+3i)^2}\right)=$$ باید از عبارت بدون پرانتز مشتق گرفته و بجای z ، $3i$ قرار دهیم $=\alpha$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+9)^2}=\operatorname{Re}\left[2\pi i\,\alpha\right]$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^4 + 13x^2 + 36} = Re \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 13x^2 + 36}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = \int_{Im(z)>0} f(z)\, e^{iz}\, dz$$

$$\int f(z)\, e^{iz}\, dz = 2\pi i \sum_{Im(z)>0} Res\ g(z)$$

$$z^4 + 13z^2 + 36 = 0 \Rightarrow z^2 = 4i^2,\ 9i^2 \Rightarrow z = \pm 2i,\ \pm 3i$$

$$z_0 = 2i,\ z_1 = 3i$$

$$\underset{z=2i}{Res}\ g(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{1}{4z^3 + 26z} = \alpha$$

$$\underset{z=3i}{Res}\ g(z) = \lim_{z \to 3i} \frac{1}{4z^3 + 26z} = \beta$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x\, dx = Re\left[2\pi i(\alpha + \beta)\right]$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^4 + 1} = Re \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = \int_{Im(z)>0} f(z)\, e^{iz}\, dz = \int \frac{e^{iz}}{z^4 + 1}\, dz$$

$$z^4 + 1 = 0 \qquad z = e^{i\left(\frac{2k\pi + \pi}{4}\right)} \qquad z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

z_2 و z_3 قابل قبول نیستند

$$\int f(z)\, e^{iz}\, dz = 2\pi i \sum_{Im(z)>0} Res\ g(z) \ldots$$

$$\left\{ \underset{z=z_0}{Res}\ g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{e^{iz}}{4z^3} = \alpha,\ \underset{z=z_1}{Res}\ g(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{e^{iz}}{4z^3} = \beta \right\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x\, dx = Re\left[2\pi i(\alpha + \beta)\right]$$

$$L=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{4x^4+12x^2+9}\,dx=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i2x}\,dx=I$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i2x}\,dx=\int_{\mathrm{Im}(z)>0}f(z)\,e^{i2z}\,dz=\int_{\mathrm{Im}(z)>0}g(z)\,dz$$

$$4z^4+12z^2+9=0\implies z^2=-\frac{12}{2}\pm\frac{a}{2}i=2e^{\pm i\theta}$$

$$z^2=2e^{i\theta}\implies z_0=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\quad,z_1=\sqrt{2}\,e^{2\theta/2}$$

$$z^2=2e^{-i\theta}\implies z_2=\sqrt{2}\,e^{-i\theta/2}\quad,z_3=\sqrt{2}\,e^{-i2\frac{\theta}{2}}$$

تنها z_0 و z_1 قابل قبولند.

$$\left.\begin{aligned}&\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\;g(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{16z^3+24z}=\alpha\\[2ex]&\underset{z=z_1}{\mathrm{Res}}\,(g(z))=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{16z^3+24z}=\beta\end{aligned}\right\}\implies I=\mathrm{Re}\left[2\pi i\,(\alpha+\beta)\right]$$

$$m=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i4x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i4x}\,dx=\int_{\mathrm{Im}(z)>0}f(z)\,e^{i4z}\,dz=\int_{\mathrm{Im}(z)>0}g(z)\,dz$$

$$(z^2+1)(z^2+4)=0\implies\begin{matrix}z_0=i\\z_1=2i\end{matrix}$$ قابل قبولند

$$\left.\begin{aligned}&\underset{z=2i}{\mathrm{Res}}\;g(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{e^{i4z}}{(z+2i)(z^2+1)}=\beta\\[2ex]&\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\;g(z)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i4z}}{(z+i)(z^2+4)}=\alpha\end{aligned}\right\}\implies\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos 4x\,dx=\mathrm{Re}\left[2\pi i\,(\alpha+\beta)\right]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\, dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2x}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2x}\, dx = \int_{\text{Im}(z)>0} f(z)\, e^{i2z}\, dz = \int_{\text{Im}(z)>0} g(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z)>0} \text{Res}\; g(z)$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} i$$

هیچ‌کدام از دو ریشه در ناحیه‌ی $\text{Im}(z)>0$ قرار ندارند پس تابع $\dfrac{e^{i2z}}{z^2+z+1}$ در ناحیه‌ی $\text{Im}(z)>0$

تحلیلی است در نتیجه طبق قضیه‌ی انتگرال کوشی انتگرال آن در این ناحیه صفر است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2x\, dx = 0$$